Szilasi József

HORIZONTÁLIS STRUKTURÁK

Kandidátusi értekezés

Debrecen, 1987.

O. BEVEZETÉS

/0.1/ Ha Richard Palaist követve egyetértünk abban, hogy egy matematikai diszciplinát az általa tanulmányozott kategória határoz meg, akkor /v.ö. [Pal]/ értekezésünk hovatartozását illetően is mód nyilik néhány hasznos, előzetes észrevétel körvonalazására. - Erősen idevágó példával kezdve, a szóbanforgó fölfogás szerint pl. a lineáris analizis a topologikus vektorterek /mint objektumok/ és a folytonos lineáris leképezések /mint morfizmusok/ tana. A lineáris analizis globalizált változatát kapjuk, ha topologikus vektortér gyanánt egy sokaság fölötti vektornyaláb metszeteinek vektorterét tekintjük, a folytonos leképezéseket pedig lineáris differenciáloperátorokkal /vagy integro-differenciáloperátorokkal/ realizáljuk. Amennyiben vektor-nyalábok helyett általános fibrált nyalábokat szerepeltetünk, a globális nemlineáris analizishez jutunk. Ezt a nézőpontot érvényesitve tehát, dolgozatunk legáltalánosabb célkitüzését abban jelölhetjük meg, hogy a "tradicionális" differenciálgeometria konnexiókkal foglalkozó - s ekként az alapokhoz tartozó - fejezetét szisztematikus módon a globális nemlineáris analizis keretei között kisérli meg elhelyezni s az igy adódó fogalmi-technikai apparátus mozgósitásával kivánja kidolgozni. - Valójában a globális nemlineáris analizis jelzett keretein is tágitottunk kis mértékben: azt találtuk, hogy a "mi min mulik?" kérdésre világosabb válaszok nyerhetők, ha fibrált nyalábok helyett a fibrált tereket /fibered space/ választjuk kiinduló objektumainknak. /Ez a némileg nagyobb általánosság szerencsésen találkozik napjaink legfrissebb alkalmazási igényeivel, v.ö. pl. [MM2]./ Stratégiánk a konnexióelmélet szóbanforgó "beágyazásánál" igen egyszerü. Ha $\xi = (E, \pi, M)$ az alapulvett fibrált tér, képezzük a τ_E lineáris érintőnyaláb $V\xi$ vertikális résznyalábját s ehhez kijelölünk egy $H\xi$ Whitney-komplementert, azt mondva ilyenkor, hogy egy horizontális strukturát adtunk meg ξ-n. Horizontális struktura birtokában a Lie-deriválás alkalmas általánositása segitségével /nemlineáris/ differenciáloperátorok egy olyan családját konstruáljuk meg, amelyről a vektornyaláb esetben - vice versa - kimutatjuk, hogy jól definiált értelemben meghatározza a horizontális strukturát //16.1.1/ tétel/.

/0.2/ Törekvéseink és a vázolt stratégia természetesen nem előzmények nélkül valók, s nem is elszigetelt vállalkozásról van szó - ellenkezőleg. Mivel a konnexió modern fölfogásához vezető ut - ha eltekintünk a finomabb historikus részletektől - a "jól ismert" kategóriába tartozik, nem szólunk e helyen arról a hosszu és fölöttébb tanulságos szürőfolyamatról, amely Levi-Civitától E. Cartan, C. Ehresmann, S. Chern, S. Kobayashi, J.L. Koszul és mások erőfeszitései nyomán elvezetett a mai, letisztult képig, egyetlen - általunk azonban döntőnek vélt - mozzanatra szeretnénk csupán fölhivni a figyelmet: Ehresmann konnexióelméleti munkásságára, amely az összekötő kapocs Elie Cartan meglehetősen intuitiv ideái és napjaink szigoru szemlélete között. Ehresmann ismerte föl /egyebek mellett - s a mi terminológiánkkal élve -/ a horizontális strukturák fundamentális jelentőségét; lényegében a fentebb jelzett általánosságban, tehát a fibrált terek szintjén /ld. [Ehr 1,2]/. Ugyancsak ő volt egyik kezdeményezője a jetek elméletének, amely a kalkulativ apparátusnak vált nélkülözhetetlen eszközévé. Fibrált tér, horizontális struktura, jet: három olyan kulcsszó, amely a mi tárgyalásunk karakterét is megszabja. Azt mondhatjuk, hogy geometriai szemléletében dolgozatunk Ehresmann eredeti ideáiból merit - mintegy a "tiszta forrásból". Ez nem jelenti azt, hogy munkánk Ehresmann ujrafölfedezését vagy valamiféle rehabilitációját kinálja, ilyesmire nincs szükség: Ehresmann hatása évtizedek óta intenziven jelen van a matematikai gondolkodásban. A minket érintő tárgykörnél maradva, igen erős, tőle eredeztethető vonulat mutatható ki pl. P.Libermann és I.Kolař munkásságában. Jeleznünk kell, hogy - a rokonság dacára - a mi megközelitésünk, kérdésfölvetésünk, technikánk teljesen más pályát követ, mint a Libermann- ill. a Kolař-féle, több impulzust is meritettünk ezzel szemben M.Modugno és csoportja idevonatkozó munkáiból / [MM 1,2]/.

/0.3/ Mielőtt rátérnénk a disszertáció tartalmának vázlatos bemutatására, szükségesnek érzünk egy rövid eszmefuttatást a kifejtés, a megfogalmazás során követett általános elveinkről.

- Törekvésünk volt dolgozatunkat - a rendelkezésre álló keretek között - "self-contained"-dé tenni. Erre - a természetes belső hajlandóságon tul - biztatást adtak az [SZ1] munkánkkal kapcsolatos kedvező visszajelzések /ennek összeállitásakor hasonló volt az alapálláspontunk/. Törekvésünk mellett szólt az a körülmény is, hogy számos, valóban - és nem csak e tárgykörben! - alapvető fogalom, konstrukció tudomásunk szerint itt fog először magyar nyelvű megfogalmazást kapni. - Kiindulva tehát a horizontális strukturákból, a konnexióelméletet ab initio dolgozzuk ki, nem tételezve föl semmilyen rájuk vonatkozó további előismeretet; eredményeinket a rendszeres kifejtés folyamatába épitjük be. Ugy véljük, az eredetiség kivánalma ezáltal nem szenved csorbát, ellenkezőleg: bizonyos ismert, de meglehetősen elszigeteltnek, partikulárisnak tünő tények uj megvilágitást kapnak azáltal, hogy egy egységes, sajátos szempontokat érvényesitő tárgyalás elemeivé válnak. - El kell mondanunk, hogy a rendszerességre való törekvés olykor áldozatokkal is járt: néhány speciálisabb eredményünket mellőzni voltunk kénytelenek annak érdekében, hogy az általános gondolatmenet megkapja a teljes kidolgozást.

/0.4/ A jelzett filozófia jegyében fogant a disszertáció I.fejezete, amelynek anyaga nagyrészt folklor. Föl kell azonban hivnunk a figyelmet néhány fontos mozzanatra ezzel kapcsolatban is. Mindenek előtt: egyáltalán nem volt eleve magától értetődő, hogy mi kerüljön ebbe a fejezetbe; másként és pontosabban fogalmazva: egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy mi az az algebrai-analitikus apparátus, amely adekvát egy általános és technikailag jól kezelhető konnexióelmélethez. A kérdéses eszközöket föl kell kutatni, össze kell gyüjteni /ha máshol már rendelkezésre állnak/ s müködőképessé kell formálni őket, elvégezve bizonyos módositásokat, kiegészitéseket. Ilyen jellegü tevékenység képezi az I. fejezet fő tárgyát.

/0.5/ Térjünk rá a részletekre! - Ami a konnexióelmélet algebrai hátterét illeti, a Lie-modulusokat s még inkább a graduált Lie-algebrákat kell elsőként kiemelnünk. /Utóbbiak ázsiója napjainkban egyébként is növekedőben van, köszönhetően az elméleti fizikában mutatkozó alkalmazási lehetőségeknek./

Az I. fejezet egyik kulcsmozzanata az általunk Frölicher--Nijenhuis-félének nevezett $A(E;\tau_E) \cong A(E)\otimes\mathcal{X}(E)$ $A(E)$-modulus megkonstruálása a 8.§-ban. Az eredeti konstrukciót - ld. [FN] - általánositottuk, a kapott objektum azonban csupán speciális példa nyalábértékü formák alkotta modulusra; utóbbiak részletes - általunk is sokban vonatkozásban átvett - tárgyalása a [GHV] monográfiában található meg. $A(E;\tau_E)$ -nek nagyfontosságu részmodulusához jutunk, ha $A_p(M;\tau_E) := \pi^*A(M)\otimes\mathcal{X}_p E \cong$ $\cong A(M)\otimes\mathcal{X}_p E$ -re, az un. vetithető vektorértékü formák modulusára szoritkozunk. $A_p(M;\tau_E)$ -t egy Modugno által javasolt /v.ö. [MM2] / - fölöttébb komplikált, de rendkivül célszerünek bizonyuló - müveleti utasitással graduált Lie-algebrává teszszük - /8.2.4/ lemma -; ez a Lie-algebra lesz tárgyalásunk egyik főszereplője.

/0.6/ Mint /0.1/-ben jeleztük, a differenciáloperátorok elmélete az az összekötő elem, amelynek segitségével a konnexióelméletet bekapcsoljuk a modern, nemlineáris analizis áramkörébe. A differenciáloperátorokra vonatkozó, eleminek mondható, sok tekintetben mégis igen friss és ujszerüen komponált, szükséges tudnivalókat a 9.§ tartalmazza. /A nemlineáris eset megragadását lehetővé tevő konstrukciók gondos leirására megkülönböztetett figyelmet forditottunk!/ A § legfontosabb eredménye talán az egyébként igen egyszerü /9.4.3/ lemma, amely egy rendkivül általános operációnak, a geometriai objektumok Salvioli-féle Lie-deriválásának - [Sal] - hatásos adaptációját szolgáltatja. Y.Koshmann-Schwarzbach egy tételének alkalmazásával következik ekkor, hogy /9.4.3/ kváziskalár differenciáloperátort vezet be, s mivel horizontális strukturához éppen a /9.4.3/-beli konstrukció specializálásával csatolunk majd differenciáloperátorokat a 16.§-ban, az itt tett észrevételek nyitják meg az utat a konnexióknak a disszertációban alkalmazott vizsgálatához.

/0.7/ Egészét tekintve az I.fejezet alapvetően technikai jellegü bevezető anyagot rendszerez /fibrált terek, nyalábok, morfizmusok, a vertikális nyaláb, jet-nyalábok és affin nyalábok, a lokális leirás apparátusa, .../. Hangsulyozandó a segédszerepet, valamennyi itt kimondott eredményt lemmaként /ill. következményként/ tituláltunk. E lemmák azonban - mint megannyi apró fogaskerék - jól átgondolt logika szerint csatlakoznak egymáshoz, s bár a fejezet eredetiségre csak erősen korlátozott értelemben tart igényt, ebben a részben is van egy-két csucspont, amit a tárgyalás megcéloz. Példaként a vetithető vektormezőkkel és a homogenitással kapcsolatos megfontolásokat emlitjük, amelyek elvezettek az $\mathcal{H}_V E$ Lie-algebra centrumának $(= \{0\})$ egy számolásmentes jellemzéséhez. - Ebben a kontextusban talán meglepőnek tűnő részletességgel szóltunk néhány olyan konstrukcióról - jet-nyaláb struktura 1-formája, infinitezimális kontakt transzformáció - amelyek a modern variációszámitás eszköztárából valók /[Gar2], [MM1]/. A magyarázat: ezekre az eszközökre szükségünk volt a vektormezők 1-jet kiterjesztésénél, ami a későbbiekben lehetővé tette a horizontális strukturára vonatkozó homogenitási feltétel egy igen frappáns megfogalmazását - ld. /15.3.4///10/.

/0.8/ A II. fejezet 10-17.§-ait szenteltük a horizontális strukturákra vonatkozó általános vizsgálatoknak, a 18.§ inkább alkalmazás-jellegű. /Megelőző fejtegetéseinkből világos, hogy a II.fejezet szorosan az I.-re épül, a dolgozat olvasása mégis kezdhető a 10.§-sal, ekkor azonban sűrűn vissza kell lapozni az előzményekhez./ A jelzett periódus gerincét - és egyben csucspontjait - a tételekben összefoglalt megállapitások képezik. Áttekintésünkben ezek rövid vázolására szoritkozunk, azzal a megjegyzéssel, hogy maga a fejezet lényegesen több, mint a csucsokra /lehetőleg minél célirányosabban/ fölvivő utak megkeresése, bejárása. - A disszertációban az első, tételként emlitett eredmény /14.4.1/, amely a horizontális strukturák különböző megadásait s ezek kapcsolatát irja le, átfogó jelleggel. /Azt természetesen nem állitjuk, hogy /14.4.1/-gyel az összes lehetőséget kimeritettük horizontális struktura megadására, a legfontosabbakat azonban minden bizonnyal földeritettük./ Átfogó jellege folytán - a /0.3/-ban jelzett filozófia szellemében - a tétel az eredeti eljárások mellett jólismert konstrukciókat is magába foglal /horizontális struktura származtatása kanonikus egzakt sor hasitásaként ill. jet-nyaláb globális metszeteként/ - ezek elkülönitése kétségkivül mesterkélt lett volna. A horizontális strukturák tárgyalt megadásai közül a <u>liftelő formákra</u> hivjuk föl külön is a figyelmet. Értelmezésüket a bázissokaság vektormezőinek horizontális liftjét karakterizáló tulajdonságokra alapoztuk; kitüntetett jelentőségüket az a körülmény biztositja, hogy alkalmazható rájuk a /0.5/-ben körvonalazott algebrai apparátus. A liftelő formák technikájának további előnyeit véleményünk szerint hatásosan demonstrálja a záró §.

/0.7/ Az általános horizontális strukturáktól a lineáris konnexiót eredményező horizontális strukturákhoz a homogenitási feltételen keresztül vezet az ut. E feltételre uj, elegáns értelmezést találtunk, amelynek a - szintén átfogó jellegü - /15.3.4/ tételben tiz ekvivalensét fogalmaztuk meg /ezuttal sem mellőzve az olyan ismert kritériumokat, mint a /15.3.4///3/,/4/,/11/ kijelentések/. A homogenitási feltétel diszkussziója végére /15.3.4/ még nem tesz pontot: további, fontos jellemzésével szolgál a /16.3.2/, majd a /18.5.8/ tétel. Az előbbi szerint egy horizontális struktura pontosan akkor teljesiti a homogenitási feltételt, ha csatolt differenciáloperátorai a linearizáltjaikkal azonosithatók /a linearizálás mibenlétét természetesen gondosan tisztáztuk/; az utóbbi értelmében a homogenitási feltétel teljesülése ekvivalens a vizsgált horizontális strukturához tartozó Berwald-triad deflexiómentességével. /Látszólag távoli fogalmak esztétikus összecsengése!/

/0.8/ A horizontális strukturák görbületelméletének tárgyalását az absztrakt háttér megvilágitásával készitjük elő. A klasszikus Nijenhuis-torzió fogalmát átvisszük tetszőleges Lie-modulusok kontextusába s igazoljuk, hogy természetesnek mondható feltételek mellett - ld. /17.1.1/ - Lie-modulus egy részmodulusa pontosan akkor Lie-részmodulus, ha egy alkalmas projekció-operátor Nijenhuis-torziója eltünik. Ez az észrevétel egyben kezünkbe adja a kulcsot a horizontális strukturák integrálhatóságának vizsgálatához. A Grifone-féle definiciót [Gr] általánositva, horizontális struktura görbületi tenzormezőjét a $-\frac{1}{2}[\![h,h]\!] =: R$ Nijenhuis-torzióként értelmezzük, ahol h a strukturához tartozó horizontális projektor. A görbületi tenzormezővel azonos információ-tartalmu, de a kalkulativ kezelhetőség - algebrai apparátusunk mozgósithatósága! - szempontjából sokkal előnyösebb a

/17.3/-ban bevezetett g görbületi forma. Ezt explicite is előállitjuk a horizontális struktura liftelő formája segitségével - /17.3.3/ tétel - s igy egyben könnyen járható utat nyitunk a Bianchi-identitás általánositása - /17.3.4/ tétel - irányába. /Megjegyezzük, hogy további érdekes - a szokásos Lie-deriválás segitségével történő leszármaztatást mutat be a görbületi formára /17.3.6//. Előirva a homogenitási feltétel teljesülését, részletesen diszkutáljuk a bevezetett görbületi forma s az ilyenkor rendelkezésre álló klasszikus görbületi tenzormező kapcsolatát //17.5.1/, /17.5.2/ és következményeik/. Igen hasznosnak érezzük azt a konstrukciónkat, amely a hagyományos külső kovariáns deriválást általánositja; ezt minden bizonnyal alátámasztja az a levezetés, amelyet a segitségével adtunk az emlitett Bianchi/-tipusu/ identitásra.

/0.9/ A záró - s egyben a legterjedelmesebb - § három, egymáshoz meglepően szoros rokonságot mutató témát tárgyal: affin-, projektiv és Finsler-strukturákat. - Egy affin strukturát olyan párként értelmeztünk, amelyet egy horizontális struktura valamint egy alkalmas "eltolás-morfizmus" alkot. A nyaláb és az eltolás megfelelő speciális választásával jutunk a klasszikus affin strukturákhoz. Levezetjük az "affin Bianchi-identitást" s rámutatunk, hogy ez tekinthető az $\mathfrak{S} R^{\nabla}(X,Y)(Z) = 0$ klasszikus Bianchi-identitás közvetlen általánositásának. - A projektiv strukturák tárgyalásakor fő célunk annak megmutatása volt, hogy ezek is beilleszthetők - mégpedig eléggé természetes módon - a horizontális strukturák általános elméletének keretei közé. Ehhez azonban meg kellett találnunk az alkalmas definiciókat - ebben rejlett a tulajdonképpeni nehézség. Fogalmilag egyszerű, de kétségkivül erősen absztrakt megközelitést dolgoztunk ki; ezt ellensulyozandó részletesen diszkutáltunk olyan kérdéseket - a Thomas-féle paraméterek bevezetése, a projektiv ekvivalencia problematikája - amelyek kapcsán világosan érzékelhetővé vált a klasszikus elmélettel való "konzisztencia". A terjedelmi korlátok folytán - v.ö. /0.3/! - azonban le kellett mondanunk pl. a Kobayashi-Nagano-féle elmélettel való kapcsolat tisztázásáról vagy a görbület és integrálhatóság ez esetben kiváltképp izgalmasnak igérkező tanulmányozásáról.

/0.10/ A <u>Finsler-konnexió</u> fogalmát is tágabb értelemben használjuk a klasszikus elméletből megszokottnál: kiindulópontunk az, hogy ez lineáris konnexió egy - tetszőleges! - vektornyalábhoz tartozó vertikális nyalábon. Megközelítésünk érzésünk szerint a Szabó Zoltán-féle elmélettel [Sza] áll leginkább rokonságban, terminológiánkban azonban igyekeztünk a lehető legszorosabban Matsumoto monográfiáját [M] követni, lévén ez a modern Finsler-geometria - egyetlen - "Bibliája". - A perdöntő észrevétel, amely az elmélet nagymérvű leegyszerűsitését teszi lehetővé, az, hogy a Finsler-konnexiók fölépitésében két képződmény játszik - egyenranguan fontos - meghatározó szerepet: a horizontális struktura és az un. <u>pszeudokonnexió</u>. Ezekből konstruáljuk az un. <u>Cartan-triádot</u>, majd Cartan-triád birtokában leszármaztatjuk a Finsler-konnexiók jellemzéséhez szükséges - s az általánosság adott szintjén elérhető - lényegesebb geometriai adatokat, leirjuk továbbá azokat a megszoritásokat, amelyek elvezetnek bizonyos "tipikus" Finsler-konnexiókhoz. E rész fő eredményei a /18.4.3/, /18.5.8/ és /18.7.1/ tételek.

/0.11/ Megtisztelő kötelessége végül a szerzőnek, hogy kifejezze köszönetét Tamássy Lajos professzor urnak. Ő biztositotta számára a tárgykörben való intenziv elmélyülés feltételeit, s egyben azt a folyamatos ösztönzést, amelynek hiján e munka aligha készült volna el.

TARTALOM

SZIMBÓLUMOK

$: :$	bizonyitás kezdete és vége

Logikai jelek

$\wedge$, $\vee$	és, vagy
$\exists$	létezik
$\exists !$	egyértelmüen létezik
$\forall$	bármely
$\Longrightarrow$	ha ..., akkor; "következik"
$:\Longrightarrow$	definició szerint következik
$\Longleftrightarrow$, $:\Longleftrightarrow$	pontosan akkor, definició szerint ~
$=$, $\equiv$	egyenlő
$:=$, $=:$	definició szerint egyenlő

Halmazok

$\in$, $\notin$	eleme, nem eleme
$\subset$, $\supset$; $\not\subset$, $\not\supset$	része; nem része
$\{x \in X \mid p(x)\}$	az X halmaz p -tulajdonságu elemeinek halmaza
$\emptyset$	az üres halmaz
$\{a\}$	az "a" elem alkotta halmaz
(a, b)	rendezett pár
$\cup$, $\cap$	unió, metszet
$\sqcup$	diszjunkt unió
$A \setminus B$	$\{a \in A \mid a \notin B\}$
$A \times B$	$\{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ - A és B Descartes-szorzata
$A_1 \times \cdots \times A_n$	n -tényezős Descartes-szorzat
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$	a természetes, egész, racionális és valós számok halmaza
$\mathbb{R}^+$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
$\underline{n}$	$\{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^+$
$(a_\lambda)_{\lambda \in L}$	elemcsalád

Leképezések

$f: A \longrightarrow B,\ a \longmapsto f(a)$	leképezés
$f(A) = \mathrm{Im}\, A$	az A halmaz képe
$1_A \equiv 1$	az A halmaz identikus leképezése
$f^{-1}(b) = A_b$	$b \in B$ inverz képe vagy a $b \in B$ fölötti fibrum
$f \upharpoonright \mathcal{U}$	f leszükitése az $\mathcal{U} \subset A$ halmazra
$i: A \hookrightarrow B$	$A \subset B$ természetes inkluziója B -be

Analizis, kalkulus sokaságokon

Df	az f leképezés deriváltja
$D_i f$	i -ik parciális derivált
$\mathcal{M}$	a sokaságok kategóriája /2.0/
$C^{\infty}(M,N)$	az M és N sokaság közötti morfizmusok /$\equiv$ sima leképezések/ halmaza /2.0/
$C^{\infty}(M)$	$C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ /2.1/
$T_x M$	az M sokaság érintőtere az x pontban
$T_x f$	$f \in C^{\infty}(M,N)$ érintőleképezése az x pontban
$\mathcal{X}(M)$	az M sokaság vektormezőinek modulusa
$[X,Y]$	az X és Y vektormező Lie-szorzata
$X \overset{f}{\sim} Y$	az X és Y vektormező f -megfelelő $(f \in C^{\infty}(M,N))$
$\mathcal{L}_X$	az X vektormező szerinti Lie-deriválás operátora /általánositás: /9.4.3//
$A(M)$	az M sokaság fölötti differenciálformák algebrája
$A^1(M) \equiv \mathcal{X}^* M$	az M sokaság fölötti 1-formák modulusa
d	a külső differenciálás operátora

A disszertációban alkalmazott speciálisabb jelölések

$\xi = (E,\pi,M)$	fibrált tér /2.1/
FS , $FS(M)$	a fibrált terek ill. az M bázisterű fibrált terek kategóriája /2.1/
$Sec\,\xi$	$\xi \in FS$ metszeteinek halmaza /2.1/
$Sec\,\xi \mid \mathcal{U}$	$\xi \in FS(M)$ $\mathcal{U} \subset M$ fölötti metszeteinek halmaza

$\mathrm{Mor}(\xi,\xi')$, $\mathrm{Mor}_M(\xi,\xi')$	a ξ és ξ' fibrált tér közötti morfizmusok ill. M -morfizmusok halmaza
$X \times_S Y$	fibrált szorzat /2.2/
$f^*\xi$	a ξ fibrált tér f leképezés általi pull-backje /2.2/
FB, $FB(M)$	a nyalábok ill. az M bázisterű nyalábok kategóriája /2.4/
VB, $VB(M)$	a vektornyalábok ill. az M bázisterű vektornyalábok kategóriája /2.5/
$\xi_1 \oplus \xi_2$	a ξ_1 és ξ_2 fibrált tér fibrált szorzata /2.4/, $VB(M)$ -esetben Whitney-összege /2.7/
φ_*	VB -morfizmus által indukált morfizmus /2.5/
$T\xi$	vektornyaláb tangens fibrálása /2.6/
ξ^*	duális nyaláb /2.6/
$\mathrm{HOM}(\xi,\xi')$	homomorfizmus-nyaláb /2.7/
$\mathrm{END}\,\xi$	$\mathrm{HOM}(\xi,\xi)$ /2.7/
$\xi \otimes \xi'$	vektornyalábok /külső/ tenzori szorzata /2.7/
$\mathfrak{D}(M,N)$	derivált nyaláb /3.1/
∂F	leképezés infinitezimális variációja /3.1/
$\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{i \in n}$	$\mathfrak{X}(M)$ lokális bázisa /3.2/
$(\pi^{-1}(\mathcal{U}); (x^i), (y^\alpha))$	adaptált vektortérkép /3.3/
$V\xi = (VE, \pi_V, E)$	a ξ fibrált tér vertikális nyalábja /4.1/
$k : VE \to E$	kanonikus leképezés /4.2/
$\mathfrak{X}_V E := \mathrm{Sec}\, V\xi$	a vertikális vektormezők modulusa /4.3/
Z	Liouville-vektormező /4.4/
$k^\# \sigma \equiv \sigma^V$	$\sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi$ vertikális liftje /4.4.3/
$\mathfrak{X}_p E$	projektálható vektormezők modulusa /5.4.3/
X^c	$X \in \mathfrak{X}(M)$ komplett liftje /5.5/
$(\mathcal{A}, \xi)$	affin nyaláb /6.2/
$\mathcal{A}\tau_E$	TE totálterű affin nyaláb /6.2.4/
$\partial_x \sigma$	1 -jet /6.3/
JE	1 -jet tér /6.3/
$\mathcal{A}J\xi = (JE, p, E)$	/affin/ jet nyaláb /6.3.2/, /6.3.4/

$J\xi = (JE, \varepsilon, M)$	1-jet nyaláb /6.3.2/
$j\sigma$	metszet 1-jet kiterjesztése /7.2/
^1X	vektormező 1-jet prolongációja /7.4/
$A^k(M;\xi)$	ξ-értékü k-formák modulusa /8.1/
$A(M;\xi)$	$\bigoplus_{i=1}^{n} A^k(M;\xi)$ /8.1/
$[\Omega, \Psi]$	Nijenhuis-szorzat /8.2.4/
$A(M;V\xi)$	a vertikális vektori formák algebrája /8.3/
ℓ^v	vertikális liftelés /8.3.4/
$\mathfrak{D}$	$Sec\,\xi \longrightarrow Sec\,\xi'$ differenciáloperátor /9.1/
$\mathfrak{D}_S$, $\check{\mathfrak{D}}_S$	Spencer- ill. kiterjesztett Spencer-operátor /9.1.2/
$\mathfrak{DO}(\xi,\xi')$, $\mathcal{L}\mathfrak{DO}(\xi,\xi')$	differenciáloperátorok vektortere /9.1.4/
$\mathcal{L}_X\sigma$	metszet Lie-deriváltja /9.4.3/
H	horizontális struktura fibrált téren /10.1/
$H\xi$	$\xi \in FS(M)$ horizontális résznyalábja /10.1/
P^v, P^H	horizontális strukturához tartozó vertikális ill. horizontális projektor /10.2/
$\mathfrak{X}_H E$	horizontális vektormezők modulusa /10.3/
HX, VX	vektormező horizontális ill. vertikális része /10.3/
$(N_i^\alpha)_{i\in\underline{n},\alpha\in\underline{r}}$	horizontális struktura paraméterei /10.4.2/
$\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right)_{i\in\underline{n}}$	$H\xi$ lokális bázisa /10.4.2/
$\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right)_{i\in\underline{n}}$, $\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\alpha\in\underline{r}}$	horizontális strukturához adaptált lokális bázis /10.4.3/
ℓ^H	horizontális fölemelés /11.1/
$\mathcal{H}$	horizontális leképezés /12.1.1/
γ	affin jet-nyaláb globális metszete /12.2.2/
$\mathcal{V}$	vertikális leképezés /12.3.1/
$\underline{v}$	vertikális projektor /13.1/
C, C^H	konnektor /13.4/ /13.4.2/

(c, i)	jet-tranzláció /14.1.2/
κ	$e \circ (\Upsilon \times 1_{TM})$ /14.2.1/
P, P^H	majdnem-szorzat struktura /14.3/, /14.3.1/
∇_X	prekovariáns deriválás /16.1.2/
∇	prekonnexió /16.1.2/
$[\![f, g]\!]$	Nijenhuis-torzió /17.1/
R	görbületi tenzormező /17.2/
ϱ	görbületi forma /17.3/
R^∇	∇ görbületi formája /17.5/
d^∇	∇ -hoz tartozó külső kovariáns deriválás /17.6/
d^H	H -hoz tartozó külső kovariáns deriválás /17.6/
(H, λ)	affin struktura /18.1/
$\mathcal{A}\ell^H$	affin liftelő forma /18.1/
$\mathcal{A}\varrho$	affin görbületi forma /18.1/
τ	torzió-forma /18.1.1/
T	torzió-tenzor /18.1.1/
$\mathcal{P}\tau_M$	projektiv vektornyaláb /18.2/
$(H; \omega, \eta)$	előprojektiv struktura /18.2/
$\mathcal{P}\ell^H$	projektiv struktura liftelő formája /18.2/
(∇, A)	pszeudokonnexió /18.3/
(∇^v, i)	indukált v -konnexió /18.3.1/
(∇, H)	Matsumoto-pár /18.4/
$(\Gamma^\beta_{i\alpha}, C^\gamma_{\alpha\beta})$	Finsler-konnexió paraméterei /18.4/
(∇^h, ∇^v, H)	Cartan-triád /18.4/
$(F^\beta_{i\alpha}, C^\gamma_{\alpha\beta}, N^\alpha_i)$	Cartan-triád paraméterei /18.4.4/
D	deflexió /18.4.6/
P^1	Cartan-triádhoz tartozó torzió /18.5/
J	vertikális endomorfizmus /18.6/
L	Lagrange-függvény /18.6.1/
ω_L	Lagrange 2-forma /18.6/

Megjegyzés: Néhány szimbólum többféle funkcióban is szerepel, a félreértés lehetőségét azonban a szövegkörnyezet mindig kizárja.

Szummációs megállapodás: Egytagu kifejezésben azonos betüvel jelölt alsó és felső indexre összegzés értendő, a kontextustól függően általában 1-től n-ig ill. 1-től r-ig.

I. KALKULUS FIBRÁLT TEREKEN

1.§. Graduált algebrák és Lie-modulusok

/1.0/ Ebben a bevezető §-ban a differenciálgeometria és globális analizis algebrai nyelvezetének néhány kulcsszavát tekintjük át, különös tekintettel egy-két kevésbé közhasználatu konstrukcióra. A cimbe is kiemelt graduált Lie-algebrák és a Lie-modulusok vezérmotivumokként fognak végigvonulni az egész tárgyaláson - szinte a szó zenei értelmében. Utóbbiak eme szerepére Edward Nelson hivta föl elsőként a figyelmet, ld. [N].

/1.1/ A gyürü fölötti modulus fogalmát természetesen nem kell föleleveniteniink. A modulusoknál általánosabb strukturák az un. bimodulusok. - Tegyük fel, hogy R és S egységelemes gyürü, A pedig Abel-csoport, amely egyidejüleg baloldali R -modulus és jobboldali S -modulus. Ha

$$\forall a \in A,\ \varrho \in R,\ \sigma \in S:\ (\varrho a)\sigma = \varrho(a\sigma),$$

akkor azt mondjuk, hogy A R-S - bimodulus. Bimodulus-konstrukcióra - fontos differenciálgeometriai kontextusban - a 8.§-ban lesz szükségünk.

/1.2/ Ha A R-modulus s adva van A -n egy $[\,,\,]: A\times A \longrightarrow A$, $(x,y)\longmapsto [x,y]$ R -bilineáris szorzás, akkor A -t - a szokásos módon - R fölötti algebrának nevezzük. Az algebra egy derivációja olyan $\theta: A\longrightarrow A$ R -lineáris leképezés, amelyre

$$\forall x,y \in A:\quad \theta[x,y]=[\theta(x),y]+[x,\theta(y)].$$

"A" összes derivációinak halmaza kézenfekvően R -modulussá tehető, erre a modulusra a $\operatorname{Der} A$ jelölést fogjuk használni. - Az A algebra graduált, ha előáll részmodulusai egy $(A_n)_{n\geq 0}$ sorozatának direkt összegeként ugy, hogy

$$\forall m,n \in \mathbb{N}:\quad A_m A_n \subset A_{m+n}$$

/a baloldalon komplexus-szorzat áll/. Graduált Lie-algebrán olyan graduált algebrát értünk, amelyben

1° $\forall x \in A_m, y \in A_n: \ [x,y] = -(-1)^{mn}[y,x]$;

2° $\forall x \in A_m, y \in A_n, z \in A_p$:

$$(-1)^{mp}[[x,y],z] + (-1)^{nm}[[y,z],x] + (-1)^{pn}[[z,x],y] = 0$$

/<u>általánositott Jacobi-identitás</u>/.

Ha A graduált algebra, $r \in \mathbb{Z}$ rögzitett egész szám, $\theta: A \longrightarrow A$ $\mathbb{R}$ -lineáris leképezés és teljesül a

$$\theta[x,y] = [\theta(x), \theta(y)] + (-1)^{mr}[x, \theta(y)] \quad (m,n \in \mathbb{N};\ x \in A_m, y \in A_n)$$

feltétel, akkor azt mondjuk, hogy θ <u>r -edfoku derivációja</u> A -nak.

Talán nem érdektelen megemlitenünk, hogy az utóbbi években a különböző statisztikáju elemi részecskék "szuperszimmetriái" kapcsán az elméleti fizika is egyre élénkebb érdeklődést mutat a graduált Lie-algebrák iránt /ld. pl. [CNS] /. Számunkra a 8.§-ban megkonstruálásra kerülő un. leszükitett Frölicher-Nijenhuis-féle graduált Lie-algebra fog döntő fontosságunak bizonyulni, kalkulativ apparátusunk rendkivül hatékony eszközeként.

/1.3/ Tegyük fel a most következőkben, hogy A az $\mathbb{F}$ null-karakterisztikáju test fölötti kommutativ, egységelemes algebra, L pedig A -modulus. - Az L modulust <u>Lie-modulusnak</u> nevezzük, ha adva van egy

$$[\ ,\ ] : L \times L \longrightarrow L, \quad (X,Y) \longmapsto [X,Y]$$

és egy

$$\theta : L \longrightarrow \mathrm{Der}\, A, \quad X \longmapsto \theta_X$$

leképezés, eleget téve a következő axiómáknak:

/LM1/ L a $[\ ,\ ]$ un. <u>Lie-szorzással</u> <u>$\mathbb{F}$ fölötti</u> Lie-algebra.

/LM2/ A θ leképezés A -lineáris.

/LM3/ $\forall X,Y \in L, f \in A: [X, fY] = f[X,Y] + (\theta_X f)Y.$

/LM4/ $\forall X,Y \in L, f \in A: \ \theta_{[X,Y]}f = (\theta_X \circ \theta_Y - \theta_Y \circ \theta_X)f.$

Lie-modulus egy részmodulusa <u>Lie-részmodulus</u>, ha bármely két elemével együtt azok Lie-szorzatát is tartalmazza. $\mathcal{J} \subset L$ <u>Lie-ideál</u> az L Lie-modulusban, ha

/I1/ $\forall X \in L, Y \in \mathcal{J}: \ [X,Y] \in \mathcal{J}$;

/I2/ $\forall Y \in \mathcal{J}, f \in A: \ \theta_Y f = 0.$

Egy nagyon egyszerü példa: az $\{Y\in L \mid \forall f\in A:\ \theta_Y f = 0\}$ halmaz Lie-ideál az L Lie-modulusban, mégpedig <u>maximális</u> Lie-ideál. - Be kell végül vezetnünk, a Lie-modulusok közötti morfizmus fogalmát. Legyen L_1 és L_2 Lie-modulus az A algebra fölött. A $T: L_1 \longrightarrow L_2$, $X \longmapsto TX$ leképezésről akkor mondjuk, hogy <u>morfizmusa</u> L_1-nek L_2-be, ha

1^o A -lineáris;

2^o $\forall\, X,Y\in L_1:\ T[X,Y]=[TX,TY]$;

3^o $\forall\, X\in L_1,\ f\in A:\ \theta_{TX} f = \theta_X f.$

A $\mathcal{P}=(P,\pi,L)$ hármas <u>Lie-nyaláb</u>, ha $\pi: P \longrightarrow L$ <u>epimorfizmus</u> /szürjektiv morfizmus/ a P és L Lie-modulus között. /2/ alapján azonnal adódik, hogy $Ker\,\pi$ Lie-részmodulusa P-nek; ezt $\mathcal{P}$ <u>vertikális modulus</u>aként emlitjük.

Fölösleges e helyen adni illusztrációkat a most elmondottakra: a Lie-modulusok s a hozzájuk kapcsolódó konstrukciók - miként azt jeleztük - végig kisérni fogják tárgyalásunkat.

<u>2.§. Fibrált terek, nyalábok</u>

/2.0/ Analitikus vizsgálataink szinteréül a véges dimenziója, parakompakt C^∞ -sokaságok kategóriája szolgál, amelyet a továbbiakban $\mathcal{M}$ -mel jelölünk. Az $\mathcal{M}$ kategória morfizmusai a C^∞ (= sima) -leképezések: ha $M,N\in\mathcal{M}$, akkor

$$\mathrm{Mor}(M,N) := C^\infty(M,N) := \{f: M\longrightarrow N \mid f \text{ sima}\}.$$

Az egyszerüség kedvéért $C^\infty(M,\mathbb{R})$ helyett $C^\infty(M)$ -et irunk; $C^\infty(M)$ természetes módon algebra az $\mathbb{R}$ test fölött. Egyszer s mindenkorra megállapodunk abban, hogy a "differenciálható" jelzőt C^∞ értelemben használjuk - s olykor mellőzzük is. Fölhivjuk a figyelmet e helyen arra, hogy az alkalmazásra kerülő /standard és kevésbé standard, a szövegben explicite definiált vagy csupán a folklórból átvett/ <u>jelölések</u> egy meglehetősen teljes listáját "Szimbólumok" címszó alatt adjuk.

/2.1/ Fibrált téren olyan $\xi = (E, \pi, M)$ hármast értünk, ahol $E, M \in \mathcal{M}$ és $\pi \in C^\infty(E, M)$ szürjektív szubmerzió /P. Libermann szóhasználatával élve: szürmerzió/. E -re a totáltér, M -re a bázistér elnevezést használjuk, π a fibrált tér projekciója, $E_x := \pi^{-1}(x)$ az $x \in M$ pont fölötti fibrum. - Ha $\mathcal{U}$ nyilt halmaza ξ bázisterének, $\sigma : \mathcal{U} \to E$ sima leképezés és $\pi \circ \sigma = 1_{\mathcal{U}}$, akkor azt mondjuk, hogy σ /$\mathcal{U}$ fölötti/ lokális metszete ξ -nek; speciálisan az $\mathcal{U} = M$ esetben globális metszetről, röviden metszetről szólunk. A fibrált tereknek karakterisztikus tulajdonsága a lokális metszetek létezése: a sokaságok elemi elméletéből ismert /ld. pl. [BrC], p.87/, hogy egy $\pi : E \to M$ leképezés pontosan akkor szürmerzió, ha M minden pontjának van olyan környezete, amely fölött lokális metszet adható meg. A ξ fibrált tér összes metszeteinek halmazára a $Sec\,\xi$, speciálisan egy $\mathcal{U} \subset M$ nyilt halmaz fölötti metszeteinek halmazára a $Sec\,\xi | \mathcal{U}$ jelöléssel élünk. - Tekintsünk most ξ mellett egy további, $\xi' = (E', \pi', M')$ fibrált teret és legyen $(f, g) \in C^\infty(E, E') \times C^\infty(M, M')$. (f, g) morfizmus ξ és ξ' között, ha $\pi' \circ f = g \circ \pi$; ilyenkor azt írjuk, hogy $(f, g) \in Mor(\xi, \xi')$. Speciálisan az $M' = M$, $g = 1_M$ esetben M - morfizmusról szólunk, s ilyenkor $Mor(\xi, \xi')$ helyett a $Mor_M(\xi, \xi')$ jelölést alkalmazzuk. A fibrált terekkel, mint objektumokkal s a körükben definiált morfizmusokkal kategóriához jutunk, a fibrált terek FS kategóriájához. Kategóriát alkotnak speciálisan a közös M bázistérrel rendelkező fibrált terek is, ezt a kategóriát $FS(M)$ -mel jelöljük.

/2.2/ Ha X, Y, S adott halmazok, $f : X \to S$ és $g : Y \to S$ pedig adott leképezések, akkor az $X \times_S Y = \{ (x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y) \}$ halmazt a szokásos módon /f -re és g -re vonatkozó/ fibrált szorzatnak nevezzük. Ez az elemi konstrukció lépten-nyomon szerepelni fog a továbbiakban; e helyen két nagyon fontos példát idézünk. - Legyen $\xi = (E, \pi, M) \in FS$, $N \in \mathcal{M}$, $f \in C^\infty(N, M)$. Ekkor

$$f^*\xi := (N \times_M E, p_1, N); \quad p_1 := pr_1 \upharpoonright N \times_M E$$

fibrált tér, amelyet ξ f általi <u>pull-backjének</u> nevezünk. Egyszerűen adódik, hogy ha $f_\xi := pr_2 \upharpoonright N \times_M E$, akkor f_ξ fibrumonként diffeomorfizmus és $(f_\xi, f) \in \mathrm{Mor}(f^*\xi, \xi)$. (f_ξ, f) -et a pull-back fibrált tér <u>kanonikus morfizmusaként</u> említjük, követve [H], p.18. terminológiáját. - Tegyük föl másodjára, hogy $\xi_1, \xi_2 \in FS(M)$. Amennyiben $\xi_1 \oplus \xi_2 := (E_1 \times_M E_2, \pi, M)$, ahol $\pi : (z_1, z_2) \in E_1 \times_M E_2 \longmapsto \pi(z_1, z_2) := \pi_1(z_1) = \pi_2(z_2)$, ugy $\xi_1 \oplus \xi_2$ ugyancsak fibrált tér; ezt ξ_1 és ξ_2 fibrált szorzatának vagy <u>Whitney-összegének</u> hivjuk /bár egyelőre szó nincs algebrai értelemben vett összeadásról/. Megjegyzendő, hogy $\xi_1 \oplus \xi_2$ $x \in M$ fölötti fibruma $\pi^{-1}(x) = \pi_1^{-1}(x) \times \pi_2^{-1}(x)$ - ez az oka "fibrált szorzat" terminus használatának.

/2.3/ Egy elvi jelentőségü megjegyzést teszünk. - Tárgyalásunk során józan keretek között érvényesiteni igyekszünk az ismert "ökonómia-elvet". Ennek jegyében pl. a fogalmak bevezetésekor törekszünk a "megfelelő" - de nem a minden áron való - általánosságra. Ilyen "ökonomikusan egységesitő" szerep vár a Lie-modulusokra - és a fibrált terekre is. A jelzett törekvés jegyében szóltunk már fibrált terek szintjén metszetről, morfizmusokról, pull-back-ről; ezek a fogalmak igy automatikusan átvivődnek minden speciálisabb fibrált térre.

/2.4/ A szubmerziók standard tulajdonságaiból /ld. pl. [GHV], I. p.99./ adódik, hogy ha $\xi = (E, \pi, M) \in FS$, akkor E minden egyes pontjához megadható egy V nyilt környezete az illető pontnak, egy F sokaság és egy $\varphi : V \longrightarrow \pi(V) \times F$ diffeomorfizmus ugy, hogy $\pi = pr_1 \circ \varphi$. Ekkor a (V, φ) párt ξ egy <u>fibrált térképének</u> mondjuk. Fibrált térképek egy $((V_\alpha, \varphi_\alpha))$ családja <u>fibrált atlasz</u> ξ számára, ha (V_α) lefedése E -nek. - Fibrált terek általánosságában az iménti konstrukcióban szereplő F sokaság <u>nem</u> választható univerzálisan. Most szemügyre vesszük az FS kategória egy olyan nagyfontosságu részkategóriáját, a nyalábok kategóriáját, amelyben ez a figyelmeztetés érvényét veszti.

A $\xi = (E, \pi, M)$ fibrált térről akkor mondjuk, hogy <u>nyaláb</u>, ha van olyan

$$\left(\left(\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha), \varphi_\alpha\right)\right), \quad \varphi_\alpha : \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \longrightarrow \mathcal{U}_\alpha \times F_\alpha$$

alaku fibrált atlasza, un. nyalábatlasza, ahol $(\mathcal{U}_\alpha)$ nyilt lefedése M -nek s az F_α sokaságok diffeomorfak egymással. Ez utóbbiak ekvivalenciaosztályát ξ fibrumtipusának nevezzük s rendszerint F -fel jelöljük. - Igen egyszerüen illusztrálható mármost, hogy egy fibrált tér nem szükségképpen nyaláb. Tekintsünk ui. egy $\xi = (E, \pi, M)$ nyalábot. Legyen H zárt részhalmaza valamelyik E_x $(x \in M)$ fibrumnak - kizárva a $H = E_x$ eshetőséget -, $E' := E \setminus H$, $\pi' := \pi \restriction E'$. Ekkor $\xi' := (E', \pi', M) \in FS$, azonban ξ' nyilvánvalóan nem nyaláb, hiszen a fibrumai nem diffeomorfak egymással. - A nyalábok kategóriáját FB -vel, speciálisan az M bázisterü nyalábok alkotta kategóriát $FB(M)$ -mel fogjuk jelölni.

/2.5/ Tovább szükitjük a fibrált tér fogalmát. $\xi = (E, \pi, M) \in FB$ /valós/ vektornyaláb, ha fibrumtipusa /véges dimenziójú, valós/ vektortér s van olyan $/(\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha), \varphi_\alpha)/$ nyalábatlasza, hogy

$$\forall x \in \mathcal{U}_\alpha : \varphi_{\alpha,x} : E_x \longrightarrow \{x\} \times F \cong F, \; z \longmapsto \varphi_\alpha(x,z)$$

lineáris izomorfizmus. Az eddigieknek megfelelően VB -vel ill. $VB(M)$ -mel jelöljük a vektornyalábok ill. az M bázisterü vektornyalábok kategóriáját. Tegyük föl, hogy $\xi, \xi' \in VB$. $(f, g) \in Mor(\xi, \xi')$ VB - homomorfizmus, ha f fibrumonként lineáris leképezés; speciálisan a $\xi, \xi' \in VB(M)$ esetben (f, g) -t M-morfizmusnak mondjuk, ha $g = 1_M$.

/2.5.1/ lemma [GHV], I, p.63/ Legyen $\xi, \xi' \in VB(M)$, $\varphi \in Mor_E(\xi, \xi')$. - A $\varphi_* : Sec\,\xi \longrightarrow Sec\,\xi'$, $\sigma \longmapsto \varphi_*(\sigma)$; $\forall x \in M$: $\varphi_x := \varphi \restriction E_x$, $\varphi_*(\sigma)(x) := \varphi[\sigma(x)] = \varphi_x[\sigma(x)]$ leképezés $C^\infty(M)$ -homomorfizmus. ::

- A vektornyalábok prototipusát egy sokaság érintőnyalábja szolgáltatja. $M \in \mathcal{M}$ érintőnyalábja az a $\tau_M = (TM, \pi_M, M)$ hármas, ahol a totáltér M érintőtereinek az uniója, π_M pedig az érintővektorokhoz a "támadási pontjukat" hozzárendelő természetes projekció. Ilyenkor $Sec\,\tau_M$ helyett a szokásosabb $\mathfrak{X}(M)$ jelölést, "metszet" helyett a vektormező elnevezést használjuk. Általában ha $\xi \in VB$, $Sec\,\xi$ - a fibrumok lineáris strukturájának köszönhetően - $C^\infty(M)$ -modulus /s egyben valós vektortér/. $\mathfrak{X}(M)$ további strukturákat is hordoz: valós Lie-algebra a vektormezők szokásos Lie-zárójelével, sőt Lie-modulus, hiszen elemei derivációkként hatnak a $C^\infty(M)$ függvényalgebrán.

/2.6/ Legyen $M, N \in \mathcal{M}$, $f \in C^\infty(M,N)$ s jelöljük Tf -fel f érintőleképezését. Ekkor $(Tf, f) \in Mor(\tau_M, \tau_N)$.

Tekintsünk speciálisan egy $\xi = (E, \pi, M)$ fibrált teret. Nevezetes és fontos - bár elemi - tény, hogy a TE sokaság többféle - egymástól lényegesen különböző! - fibrálásnak is totáltere. Képezhető először is a $\tau_E = (TE, \pi_E, E)$ érintőnyaláb, ezt - megkülönböztetésül - olykor E lineáris érintőnyalábjaként is említjük. Másodszor: $T\xi := (TE, T\pi, TM)$ fibrált tér, amelynek egy $v \in T_xM$ pont fölötti fibruma $(TE)_v = \{a \in T_zE \mid T\pi(a) = v,\ \pi(z) = x\}$. Azonnal látható, hogy $\sigma \in Sec\,\xi$ esetén $T\sigma \in Sec\,T\xi$. $T\xi$ fibrumai egyértelműen vektortér-strukturával ruházhatók föl olymódon, hogy ha $a, b \in (TE)_v$ s létezik $\sigma, \tau \in Sec\,\xi$ melyekre $T_x\sigma(v) = a$, $T_x\tau(v) = b$, akkor a $(TE)_v$ -beli összeadásra

$$a + b = T_x(\sigma + \tau)(v),$$

a skalárral való szorzása pedig

$$\alpha a = T_x(\alpha\sigma)(v) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

teljesül. Igy $T\xi$ vektornyalábbá válik /ld. még [D], 16.15.7/, amelyet ξ tangens fibrálásának mondunk. E nyalábhoz /3.4/-ben még visszatérünk. - Egy harmadik TE totálterű fibrált teret /6.2/-ben irunk le.

/2.7/ Vektornyalábok esetén a fibrumok vektortér-strukturája ismert módon lehetővé teszi egy sor lineáris algebrai konstrukció közvetlen átültetését. VB -kontextusba. Igy a $\xi_1 \oplus \xi_2$ Whitney-összeg //2.2// vektornyalábbá válik, ha $\xi_1, \xi_2 \in VB(M)$ és $\pi^{-1}(x) = \pi_1^{-1}(x) \times \pi_2^{-1}(x)$ vektortér-strukturáját /külső/ direkt összegként definiáljuk; képezhető $\xi \in VB$ ξ^* duális nyalábja; $\xi_i \in VB(M)$, $i \in \underline{k}$ vektornyalábokból kiindulva a $\bigotimes_{i=1}^{k} \xi_i$ tenzori szorzat és a $\Lambda^k \xi$ külső hatvány. Amennyiben $\xi, \xi' \in VB(M)$, megkonstruálható a

$$HOM(\xi, \xi') = (Hom(E, E'), \pi, M),$$

$$\mathrm{Hom}\,(E,E') := \bigsqcup_{x\in M} \mathrm{Hom}\,(E_x, E'_x),\ \pi : \mathrm{Hom}\,(E_x, E'_x) \longrightarrow \{x\}$$

homomorfizmus-nyaláb, melynek speciális esete az $\mathrm{END}\,\xi := \mathrm{HOM}\,(\xi,\xi)$ endomorfizmus-nyaláb. Ha ξ' az $(M\times\mathbb{R}, pr_1, M)$ triviális nyaláb, akkor – közvetlenül látható módon – $\mathrm{HOM}\,(\xi,\xi') = \xi^*$. Jellegzetes és fontos idevonatkozó eredményként megemlitjük, hogy $\mathrm{Sec}\,\mathrm{HOM}\,(\xi,\xi')$ és $\mathrm{Mor}\,(\xi,\xi')$ – mint $C^\infty(M)$-modulusok – kanonikusan izomorfak / [GHV], I., p.61./.

– Hasznosnak bizonyul végül a tenzori szorzat általánositása nem föltétlenül közös bázisterü vektornyalábokra. Az egyszerüség kedvéért két tényezőre szoritkozva, tegyük föl, hogy $\xi\in VB(M)$, $\xi'\in VB(M')$. Ha $\xi\otimes\xi' = (E\otimes E', p, M\times M')$, ahol

$$E\otimes E' := \bigsqcup_{(m,m')\in M\times M'} E_m\otimes E_{m'},\quad p: E_m\otimes E_{m'} \longmapsto (m,m'),$$

akkor $\xi\otimes\xi'\in VB(M\times M')$. Azt mondjuk, hogy $\xi\otimes\xi'$ a ξ és ξ' vektornyaláb külső tenzori szorzata.

3.§. Lokális apparátus

/3.1/ A. Prastaro nyomán /v.ö. [Pra] / egy olyan konstrukciót vázolunk először is, amely mintegy "intrinsic" környezetet biztosit a differenciálás tárgyalására az $\mathcal{M}$ kategóriában. – Tegyük föl, hogy $M, N\in\mathcal{M}$. A

$$\mathcal{D}\,(M,N) := \tau^*_M \otimes \tau_N \cong \mathrm{HOM}\,(\tau_M, \tau_N)$$

külső tenzori szorzatot az M és N sokasághoz tartozó derivált nyalábnak nevezzük. $\mathcal{D}(M,N)$ totáltere $\bigsqcup_{(x,y)\in M\times N} \mathrm{Hom}\,(T_xM, T_yN)$; erre a $T^*M\otimes TN$ jelölést és a deriválttér elnevezést használjuk. Kézenfekvő módon lehet képezni két további $T^*M\otimes TN$ totálterü nyalábot, ezek rendre

$$\mathcal{D}_1\,(M,N) := (T^*M\otimes TN, \pi_1, M)$$

és

$$\mathcal{D}_2\,(M,N) := (T^*M\otimes TN, \pi_2, N),$$

ahol $\pi_1(T_x^*M \otimes T_y N) := \{x\}$, $\pi_2(T_x^*M \otimes T_y N) := \{y\}$.
- Ha mármost $f \in C^\infty(M,N)$, akkor f <u>deriváltján</u> azt a $Df \in \mathrm{Sec}\,\mathcal{D}_1(M,N)$ metszetet értjük, amely az

$$x \in M \longmapsto Df(x) := T_x f$$

előírás szerint hat. Amennyiben $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ és $g \in C^\infty(M_1 \times M_2, N)$, úgy g <u>i-edik parciális deriváltja</u> $(i \in (1,2))$ a

$$D_i g : M_1 \times M_2 \longrightarrow T^*M_i \otimes TN,$$

$$(p_1, p_2) \longmapsto D_i g(p_1,p_2) := Dg_{p_j}(p_i) \in T_{p_i}^* M_i \otimes T_{f(p_1,p_2)} N \quad (j \neq i)$$

leképezés, ahol $g_{p_1} : M_2 \longrightarrow N,\ x \longmapsto g_{p_1}(x) := g(p_1, x)$ és g_{p_2} értelmezése analóg. - Tekintsünk végül egy $F : \mathbb{R} \times M \longrightarrow N$ sima leképezést s jelentse j_0 az

$$M \hookrightarrow \mathbb{R} \times M,\ x \longmapsto j_0(x) := (0, x)$$

inkluziót. A

$$\partial F := pr_2 \circ D_1 F \circ j_0 : M \longrightarrow TN$$

leképezésről azt mondjuk, hogy F <u>infinitezimális variációja</u>.

/3.2/ Differenciálgeometriai vizsgálatainkban lényegében mindig egy M bázisterű fibrált téren /nyalábon, vektornyalábon/ ill. abból konstruált fibrált strukturán fogunk dolgozni. Egyszer- s mindenkorra megállapodunk abban, hogy bázissokaságunk n-dimenziós, $n > 1$. Legyen $(\mathcal{U}; u)$ térkép M-en. Ha (r^i) az $\mathbb{R}^n$ tér standard bázisához duális bázis és $u^i := r^i \circ u$ $(i \in \underline{n})$, akkor $u = (u^1, \dots, u^n)$ irható. Vezessük be az

$$s_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (t, (a^1, \dots, a^n)) \longmapsto (a^1, \dots, a^j + t, \dots, a^n) \quad (j \in \underline{n})$$

függvényeket s legyen

$$u_j := u^{-1} \circ s_j \circ (1_{\mathbb{R}} \times u) \quad (j \in \underline{n}).$$

Ekkor u_j az $\mathbb{R} \times \mathcal{U}$ Descartes-szorzatot $\mathcal{U}$-ba képezi le, mégpedig

$$(t, p) \in \mathbb{R} \times \mathcal{U} \longmapsto u_j(t,p) = u^{-1} \circ s_j\left(t, (u^1(p), \dots, u^n(p))\right) =$$

$$= u^{-1}\left((u^1(p), \dots, u^j(p) + t, \dots u^n(p))\right),$$

speciálisan $u_j(0, p) = p$. Az

$$u_{j,p} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{U},\ t \longmapsto u_{j,p}(t) := u_j(t, p) \quad (j \in \underline{n})$$

leképezéseket az alapulvett térkép p pontján átmenő <u>koordi-</u>

nátavonalaknak hivjuk. Közvetlenül adódik, hogy

$$u^i \circ u_{j|p}(t) = u^i(p) + \delta^i_j t,$$

aminek figyelembevételével egyszerű számolással nyerhető az u_j leképezések infinitezimális variációjára a

$$\partial u_j = \frac{\partial}{\partial u^j} \qquad (j \in \underline{n})$$

összefüggés. Ilymódon egy $(\mathcal{U}; u)$ térkép rögzitése után az infinitezimális variációk segitségével az $\mathfrak{X}(M)$ modulus szokásos lokális bázisához jutunk.

/3.3/ Legyen $\xi = (E, \pi, M) \in FS$. Megtartva /2.4/ jelöléseit, tegyük föl, hogy $(V; \varphi)$ olyan fibrált térképe ξ -nek, amelynél $\pi(V)$ koordinátakörnyezet, $(\pi(V); u)$ pedig térkép M -en. Válasszunk F -en egy $(\tilde{V}; \eta)$ térképet. Ekkor $(V; (u \circ \pi, \eta \circ pr_2 \circ \varphi))$ térkép az E totáltér - mint sokaság - számára; ezt a térképet a $(V; \varphi)$ fibrált térképhez adaptáltnak nevezzük. A megfelelő koordinátafüggvények

$$x^i = u^i \circ \pi \quad (i \in \underline{n}), \quad y^\alpha = \eta^\alpha \circ pr_2 \circ \varphi \quad (\alpha \in \underline{r}, \; r = \dim F).$$

Világos, hogy az x^i függvények a fibrumokon konstansok; ezeket liftelt vagy pull-back koordinátafüggvényekként is emlitjük. Ha σ $\pi(V)$ fölötti lokális metszete ξ -nek, a $\sigma^\alpha := y^\alpha \circ \sigma$ $(\alpha \in \underline{r})$ függvényekről azt mondjuk, hogy σ koordinátafüggvényei az adott térképre vonatkozóan. - A $\xi \in FB$ speciális esetben létezik F fibrumtipus, $V = \pi^{-1}(\mathcal{U})$ választás lehetséges s ennek megfelelően $(\pi(V); u)$ helyett $(\mathcal{U}; u)$ irható; következésképpen ekkor az adaptált térkép az iméntitől formailag alig eltérő

$$\left(\pi^{-1}(\mathcal{U}); (u \circ \pi, \eta \circ pr_2 \circ \varphi)\right) = \left(\pi^{-1}(\mathcal{U}); (x^i), (y^\alpha)\right)$$

alakot ölti. Amennyiben - ráadásul - ξ vektornyaláb, ugy az F fibrumtipus vektortér s ezért rajta olyan $(F; \eta)$ globális térkép rögzithető, ahol $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^r)$ F konjugált terének egy bázisa. Ebben az esetben a $(\pi^{-1}(\mathcal{U}); (x^i), (y^\alpha))$ térképről mint a $(\pi^{-1}(\mathcal{U}); \varphi)$ nyaláb-térképhez adaptált vektortérképről szólunk.

Fibrált téren /nyalábon, vektornyalábon/ történő koordinátái számolásaink során mindig a most leirt adaptált térképeket fogjuk alapul venni. Kivételt képez a $\xi = \tau_M$ eset, ekkor a liftelt koordinátafüggvények mellett praktikusabb az

$$y^i : \tau_M^{-1}(\mathcal{U}) \subset TM \longrightarrow \mathbb{R},\ v \longmapsto y^i(v) := v(u^i) = du^i(v) \quad (i \in \underline{n})$$

/d a külső differenciálás operátora/ függvényeket szerepeltetni további koordinátafüggvényekként. $(y^i) = (du^i)$ $(i \in \underline{n})$ lokális bázisa az $\mathcal{X}^*M := Sec\,\tau_M^*$ modulusnak; ehhez most a differenciálok segítségével jutottunk, de megkonstruálható lett volna a /3.1/-ben vázolt apparátussal is.

<u>/3.3.1/ lemma</u> Legyen $(\pi^{-1}(\mathcal{U}); (x^i), (y^\alpha))$ a $(\pi^{-1}(\mathcal{U}); \varphi)$ nyalábtérképhez adaptált vektortérkép a ξ r-rangu vektornyalábon. - Megadhatók olyan $e_\alpha : \mathcal{U} \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$ $(\alpha \in \underline{r})$ lokális metszetek, hogy $\forall x \in \mathcal{U} : (e_\alpha(x))$ bázisa E_x -nek /s igy (e_α) <u>lokális bázisa</u> $Sec\,\xi$ -nek/ és az

$$\mathcal{U} \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}),\ (x, (v^1, \dots, v^r)) \longmapsto v^\alpha e_\alpha(x)$$

leképezés diffeomorfizmus.

:: Tekintsük a fibrumtipuson az (η^α) bázishoz duális (a_α) bázist. Ha $e_\alpha : \mathcal{U} \longrightarrow E$, $x \longmapsto e_\alpha(x) := \varphi^{-1}(x, a_\alpha)$, akkor a /2.4/-ben rögzitett feltétel értelmében

$$\forall \alpha \in \underline{r} : \pi[e_\alpha(x)] = \pi[\varphi^{-1}(x, a_\alpha)] = \pi \circ \varphi^{-1}(x, a_\alpha) = pr_1(x, a_\alpha) = x,$$

tehát $\forall \alpha \in \underline{r} : e_\alpha \in Sec\,\xi | \mathcal{U}$. Mivel a /2.5/-ben mondottak szerint

$$v^\alpha e_\alpha(x) = v^\alpha \varphi^{-1}(x, a_\alpha) = v^\alpha (\varphi_x)^{-1}(a_\alpha) = \varphi_x^{-1}(v^\alpha a_\alpha) = \varphi^{-1}(x, v^\alpha a_\alpha),$$

(e_α) -ra tett kijelentéseink közvetlenül adódnak. ::

<u>/3.3.2/ következmény</u> /3.3.1/ feltételeivel és jelöléseivel $\forall x \in \mathcal{U} : (y^\alpha \restriction E_x)$ az $(e_\alpha(x))$ bázishoz duális bázisa az E_x fibrumnak. Amennyiben $\sigma \in Sec\,\xi | \mathcal{U}$ és σ komponensfüggvényei (σ^α), ugy érvényes a $\sigma = \sigma^\alpha e_\alpha$ összefüggés. ::

/3.4/ Koordináta-leirását adjuk néhány eddigi konstrukciónknak.

<u>/3.4.1/ lemma</u> Ha $M, N \in \mathcal{M}$, $(\mathcal{U}; x)$ térkép M -en, $(V; z)$ térkép N -en és $f \in C^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$, akkor f infinitezimális variációjának lokális előállitása

$$\partial f = \partial f^i\,(\partial z_i \circ f_0),$$

ahol $i \in \underline{m}$, $m = \dim N$; $f^i := z^i \circ f$, $f_0(x) := f(0,x)$ a /3.2/-ben bevezetett függvény.

:: Ha $x \in \mathcal{U}$ tetszőlegesen rögzített és $f_x : \mathbb{R} \to N$, $t \mapsto f_x(t) := f(t,x)$, akkor a /3.1/-beli definició értelmében $D_1 f(0,x) = Df_x(0) = T_0 f_x$.

Mivel

$$T_0 f_x \left(\frac{d}{dr}\right)_0 = (z^i \circ f_x)'(0)\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right)_{f_x(0)} = (z^i \circ f_x)'(0)\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right)_{f_0(x)}$$

/(r) $\mathbb{R}$ kanonikus koordinátarendszere/, következik, hogy

$$\forall x \in \mathcal{U}: \quad \partial f(x) = (z^i \circ f_x)'(0)\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right)_{f_0(x)} . \qquad /1/$$

Itt $\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right)_{f_0(x)} = (\partial z_i)_{f_0(x)}$ //3.2// és – az iménti meggondolással – $(z^i \circ f_x)'(0) = \partial f^i(x)$, /1/ tehát ekvivalens a lemma állításával. ::

/3.4.2/ lemma Legyen $\xi = (E, \pi, M)$ fibrált tér, $\left(V; (x^i), (y^\alpha)\right)$ $(i \in \underline{n}, \alpha \in \underline{r})$ egy fibrált térképhez adaptált térképe E-nek, $\sigma : \pi(V) \longrightarrow E$ pedig lokális metszete ξ-nek. Ekkor

$$\forall x \in \pi(V), \; v = v^i\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_x \in T_x M: \quad T_x\sigma(v) = v^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\sigma(x)} + v^i \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial u^i}(x)\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\sigma(x)},$$

ahol $\sigma^\alpha := y^\alpha \circ \sigma$ $(\alpha \in \underline{r})$ ::

/3.4.3/ következmény Tegyük föl, hogy $\xi = (E, \pi, M)$ vektornyaláb s tekintsük a $T\xi = (TE, T\pi, TM)$ tangens fibrálást. – $T\xi$-nek egy tetszőleges $v \in T_x M$ pont fölötti fibruma megadható a

$$(TE)_v = \left\{ v^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z + A^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z \;\middle|\; z \in E_x,\ (A^1, \dots, A^r) \in \mathbb{R}^r \right\}$$

alakban. Ha $a = T_x\sigma(v)$, $b = T_x\tau(v) \in (TE)_v$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ugy

$$a + b = v^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\sigma(x)+\tau(x)} + v^i\left(\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial u^i} + \frac{\partial \tau^\alpha}{\partial u^i}\right)(x)\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\sigma(x)+\tau(x)},$$

$$\lambda a = v^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\lambda\sigma(x)} + \lambda v^i \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial u^i}(x)\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\lambda\sigma(x)} . \quad ::$$

4.§. Vertikális nyaláb

/4.1/ Induljunk ki egy $\xi = (E, \pi, M)$ fibrált térből. - Mivel minden $z \in E$ pontban $\mathrm{rang}\, T_z\pi = \dim M = n = \mathrm{konst.}$ /lévén π szubmerzió/, következik /ld. pl. [AMR], 3.3.16 Prop./, hogy ha

$$V_z E := \mathrm{Ker}\, T_z\pi, \; VE = \coprod_{z \in E} V_z E, \; \pi_V : VE \to E, \; a \in V_z E \mapsto z,$$

akkor $V\xi$ résznyalábja a τ_E lineáris érintőnyalábnak. Az így nyert $V\xi$ vektornyalábot a ξ fibrált tér vertikális nyalábjának mondjuk. Szokásos $V\xi$ -t a fibruméríntők nyalábjaként is említeni, tekintettel a következő meggondolásra. - A szubmerzióknak jól ismert tulajdonsága, hogy tetszőleges $x \in M$ pont esetén az E_x fibrum /reguláris/ részsokasága az E totáltérnek /[BrC], p.88./. Ha $j_x : E_x \hookrightarrow E$ a kanonikus inkluzió, akkor $\forall z \in E_x : T_z j_x : T_z E_x \to T_z E$ injekció, s mivel $T_z\pi \circ T_z j_x = T_z(\pi \circ j_x) = 0$, ebből egyszerűen adódik $V_z E$ és $\mathrm{Im}\, T_z j_x$ egybeesése. Közvetlen következménye a megfelelő definícióknak a

/4.1.1/ lemma Legyen $\xi = (E, \pi, M)$ fibrált tér. Ha $\iota \in \mathrm{Mor}_E(V\xi, \xi)$ a természetes inkluzió és $\mu \in \mathrm{Mor}_E(\tau_E, \pi^*\tau_M)$ az $a \in T_z E \mapsto \mu(a) := (z, T_z\pi(a))$ előírással van értelmezve, akkor a

$$0 \longrightarrow V\xi \xrightarrow{\iota} \tau_E \xrightarrow{\mu} \pi^*\tau_M \longrightarrow 0$$

sorozat vektornyalábok /rövid/ egzakt sorozata. ::

A /4.1.1/-ben leírt sorozatot a továbbiakban a ξ fibrált térhez tartozó kanonikus egzakt sorozatként említjük.

/4.2/ Tegyük föl, hogy ξ speciálisan vektornyaláb. Legyenek z és z' egy E_x fibrum pontjai s tekintsük a

$$c_{z,z'} : \mathbb{R} \longrightarrow E_x, \; t \longmapsto c_{z,z'}(t) := z + tz'$$

görbét. Ennek $\dot{c}_{z,z'}(0)$ érintővektora a $T_z E_x$ érintőtérbe esik s a

$$\tau_z : z' \in E_x \longmapsto \dot{c}_{z,z'}(0) \in T_z E_x$$

leképezés jólismert módon lineáris izomorfizmus E_x és $T_z E_x$ között. Vektortérképet alkalmazva /3.3.2/ figyelembevételével kapjuk, hogy

$$v_z(z') = y^\alpha(z')\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z .$$

v_z -t a $T_z\partial_x$ érintőleképezéssel kombinálva, az

$$\begin{tikzcd} E_x \arrow[rr, dashed, "\omega_z"] \arrow[dr, "v_z"'] & & V_z E \\ & T_z E_x \arrow[ur, "T_z\partial_x"'] & \end{tikzcd}$$

diagram szerinti $\omega_z : E_x \longrightarrow V_z E$ lineáris izomorfizmushoz jutunk. Jelölje k_z az $\omega_z^{-1}: V_z E \longrightarrow E_{\pi(z)}$ inverz izomorfizmust s értelmezzük a $k : VE \longrightarrow E$ leképezést a $k \restriction V_z E := k_z$ előírással. Ekkor a

$$\begin{tikzcd} VE \arrow[r, dashed, "k"] \arrow[d, "\pi_V"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ E \arrow[r, "\pi"] & M \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív és $(k,\pi)\in Mor(V\xi,\xi)$. k -ra a továbbiakban <u>kanonikus leképezés</u>ként fogunk hivatkozni. A kanonikus leképezéshez vezető meggondolások egyben a vertikális nyalábnak a $\pi^*\xi = (E\times_M E, \pi_1, E)$ pull-back nyalábbal való természetes azonosítására is módot nyujtanak: ha

$$\lambda : E\times_M E \longrightarrow VE,\quad (z,z')\longmapsto \lambda(z,z') := \dot{c}_{z,z'}(0),$$

akkor $\lambda \in Mor_E(\pi^*\xi, V\xi)$; sőt mi több, λ <u>E -izomorfizmus</u>.

<u>/4.2.1/ lemma</u> Legyen $\xi = (E,\pi,M)$ <u>nyaláb</u>. Tegyük föl, hogy $f: \mathbb{R}\times M \longrightarrow E$ sima leképezés s hogy $\forall t\in\mathbb{R}$: $f_x(t) := f(t,x) \in E_x$ /$x\in M$ rögzített/.
Ekkor f infinitezimális variációja a vertikális nyaláb totálterébe vezető $\partial f: M \longrightarrow VE$ leképezést ad, ha eltekintünk egy f_0 általi nyilvánvaló pull-backtől.

:: A /3.3/-ban rögzített adaptált térképet használjuk. Mivel a feltétel értelmében most

$$\forall x\in M,\ i\in\underline{n}:\ x^i\circ f_x : E_x \longrightarrow \mathbb{R}$$

konstans függvény, /3.4///1/-ből következik, hogy

$$\forall x\in M,\quad \partial f(x) = (y^\alpha\circ f_x)'(0)\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{f_0(x)} \in V_{f_0(x)}E .$$

::

/4.2.2/ következmény Ha $\xi \in VB(M)$, a /4.2.1/-beli feltételek mellett ∂f a ξ totálterébe vezető leképezésként interpretálható.

:: Ekkor VE és E a kanonikus leképezés segitségével azonosithatók. ::

/4.3/ Legyen $\xi = (E,\pi,M)$ fibrált tér. A $V\xi$ vertikális nyaláb metszeteit az E totáltér vertikális vektormezőinek nevezzük s a $\mathrm{Sec}\,V\xi$ $C^\infty(E)$-modulusra az $\mathfrak{X}_V E$ jelölést rögzitjük. $\mathfrak{X}_V E$ Lie-algebra a vektormezők Lie-szorzására nézve, hiszen ha $X,Y \in \mathfrak{X}_V E$, ugy $T\pi \circ X = \sigma$ és $T\pi \circ Y = \sigma$ folytán fennállnak az $X \overset{\pi}{\sim} 0$, $Y \overset{\pi}{\sim} 0$ $(0 \in \mathfrak{X}(M))$ relációk, amelyekből jól ismert módon $[X,Y] \overset{\pi}{\sim} 0$, azaz $[X,Y] \in \mathfrak{X}_V E$ következik. Az $(x^i),(y^\alpha)$ adaptált koordinátarendszert //3.3// használva egyszerűen adódik, hogy $\mathfrak{X}_V E$-nek lokális bázisa $\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) = (\partial_{y_\alpha})$, s igy $X \in \mathfrak{X}(E)$ pontosan akkor vertikális, ha koordinátakifejezése $X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ alaku. Egy további kritériummal szolgál a könnyü számolással verifikálható

/4.3.1/ lemma $X \in \mathfrak{X}_V E \iff \forall f \in C^\infty(M) : X(f \circ \pi) = 0.$ ::

/4.3.2/ lemma Legyen $\xi = (E,\pi,M) \in FS$, $\pi^* C^\infty(M) := \{ f \circ \pi \mid f \in C^\infty(M) \}$. Ekkor $\pi^* C^\infty(M)$ természetes módon valós algebra és $\mathfrak{X}_V E$ Lie-ideál $\mathfrak{X}(E)$-ben, mint $\pi^* C^\infty(M)$ fölötti Lie-modulusban.

:: /I.1///I2/ közvetlen következménye /4.3.1/-nek, /I1/ teljesülése pedig direkt számolással ellenőrizhető, ha figyelembe vesszük, hogy most egy $X \in \mathfrak{X}(E)$ vektormező koordinátakifejezése $X = (X^i \circ \pi)\frac{\partial}{\partial x^i} + (Y^\alpha \circ \pi)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ alaku, ahol $X^i, Y^\alpha \in C^\infty(M)$ $(i \in \underline{n}, \alpha \in \underline{r})$. ::

/4.3.3/ következmény $\forall X,Y \in \mathfrak{X}_V E$, $f \in C^\infty(M)$:

$$[(f \circ \pi)X, Y] = [X, (f \circ \pi)Y] = (f \circ \pi)[X,Y].$$ ::

/4.4/ Ebben az alpontban végig föltesszük, hogy $\xi = (E,\pi,M)$ vektornyaláb. - Először a vektornyalábok kalkulusában nélkülözhetetlenül fontos Liouville-vektormezővel foglalkozunk. Ez egy "kanonikus" vertikális vektormező, amelyet a

$$z \in E \longmapsto \omega_z(z) \in V_z E$$

előírással //4.2// értelmezünk s a továbbiakban Z -vel jelölünk. Rögtön adódik, hogy a szokásos koordinátákban //3.3// $Z = y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$. A Liouville-vektormezőhöz természetesen sok más uton is eljuthatunk; egy fontos további alternatívát fogalmaz meg a

/4.4.1/ lemma Tekintsük ξ totálterén a

$$\delta_t : E \longrightarrow E \,,\quad z \longmapsto \delta_t(z) := tz \qquad /t \in \mathbb{R} \text{ rögzitett}/$$

dilatációkat s képezzük segítségükkel a

$$\delta : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E \,,\quad (t,z) \longmapsto \delta(t,z) := \delta_t(z)$$

/globális/ folyamot. Ekkor δ sebességvektormezője a Liouville-vektormező: $\dot{\delta} = Z$, azaz $\forall z \in E : \dot{\delta}(z) := \dot{\delta}_z(0) = Z(z)$ $\left(\delta_z(t) := \delta(t,z)\right)$. ::

Megjegyzendő /4.4.1/-gyel kapcsolatban, hogy pozitív dilatációkra korlátozódva s δ -t a $(t,z) \longmapsto (\exp t)z$ előírással adva meg, a /4.2.1/ bizonyításában levezetett összefüggés alkalmazásával az elegáns $Z = \partial\delta$ előállítás nyerhető. - Hasznos segédeszközt ad kezünkbe a következő konstrukció is. Véve egy $\sigma \in Sec\,\xi$ metszetet, értelmezzük a

$$D^v\sigma : x \in M \longmapsto D^v\sigma(x) \in Hom\left(T_{\sigma(x)}E \,,\, V_{\sigma(x)}E\right)$$

leképezést a

$$D^v\sigma(x)(a) := a - T_{\sigma(x)}(\sigma \circ \pi)(a) \qquad (a \in T_{\sigma(x)}E)$$

előírással /v.ö. [Gar2], Def.1.1/. Ekkor $D^v\sigma(x)(a)$ vertikális vektor, hiszen

$$T_{\sigma(x)}\pi\left[D^v\sigma(x)(a)\right] = T_{\sigma(x)}\pi(a) - \left[T_{\sigma(x)}\pi \circ T_{\sigma(x)}(\sigma \circ \pi)\right](a) =$$

$$= T_{\sigma(x)}\pi(a) - T_{\sigma(x)}\left[(\pi \circ \sigma) \circ \pi\right](a) = T_{\sigma(x)}\pi(a) - T_{\sigma(x)}\pi(a) = 0 .$$

Jogos ilymódon a $D^v\sigma$ leképezést vertikális differenciálásnak nevezni; mi is ezzel a szóhasználattal fogunk élni.

/4.4.2/ lemma Vektortérkép rögzítése után $D^v\sigma(x)(a)$ koordinátaelőállítását a

$$D^v\sigma(x)(a) = \left[A^\alpha - a^i\left(\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial u^i} \circ \pi\right)(\sigma(x))\right]\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\sigma(x)}$$

formula adja, ha $\sigma = \sigma^\alpha e_\alpha \,,\ a = a^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\sigma(x)} + A^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\sigma(x)}$. ::

Alpontunkat metszetek vertikális felemelésének tárgyalásával zárjuk.

<u>/4.4.3/ lemma</u> Legyen $\sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi$. A kanonikus leképezés segítségével konstruált

$$k^{\#}\sigma : z \in E \longmapsto k^{\#}\sigma(z) := k_z^{-1}\left[\sigma \circ \pi(z)\right] \equiv \omega_z\left[\sigma(x)\right], \quad x = \pi(z)$$

leképezés vertikális vektormező, amelynek előállítása a szokásos koordinátákban $k^{\#}\sigma = (\sigma^{\alpha} \circ \pi)\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}$. Ezt a vektormezőt a σ metszet <u>vertikális liftjének</u> nevezzük és σ^{v} -vel is jelöljük. A vertikális liftelésre teljesülnek a következők:

/1/ $(\sigma + \tau)^{v} = \sigma^{v} + \tau^{v}$, $(f\sigma)^{v} = (f \circ \pi)\sigma^{v}$;

/2/ $[\sigma^{v}, \tau^{v}] = 0$

/ $\sigma, \tau \in \mathrm{Sec}\,\xi$, $f \in C^{\infty}(M)$ tetszőleges/.

A <u>bizonyítás</u> rutin számolás, részletezésétől eltekintünk. ::

<u>/4.4.4/ következmény</u> Egy vertikális vektormező pontosan akkor vertikális liftje valamely metszetnek, ha minden vertikális lifttel kommutál.

:: /4.4.3//2/ szerint a metszetek vertikális liftjei rendelkeznek a szóbanforgó tulajdonsággal. Megfordítva, ha $X = X^{\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}} \in \mathfrak{X}_{v}E$ $\left(X^{\alpha} \in C^{\infty}(E), \alpha \in \underline{r}\right)$ akkor a feltétel értelmében speciálisan

$$\forall \beta \in \underline{r} : \quad 0 = \left[X, k^{\#}e_{\beta}\right] = \left[X^{\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial y^{\beta}}\right] = -\frac{\partial X^{\alpha}}{\partial y^{\beta}}\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}},$$

amiből $X^{\alpha} = \sigma^{\alpha} \circ \pi$, $\sigma^{\alpha} \in C^{\infty}(M)$ $(\alpha \in \underline{r})$ következik, X tehát vertikális lift. ::

<u>5.§. Homogenitás. Vetíthető vektormezők</u>

/5.1/ Legyen $\xi = (E, \pi, M) \in VB(M)$, $k \in \mathbb{Z}$, $f \in C^{\infty}(E)$. - Azt mondjuk, hogy az f <u>függvény k -adrendben homogén</u>, ha $k \geq 0$ esetén $\forall t \in \mathbb{R}: f \circ \delta_t = t^{k} f$, $k < 0$ esetén $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $f \circ \delta_t = t^{k} f$ / δ_t dilatáció, ld. /4.4.1//.

/5.1.1/ lemma /"Euler-tétel"/ $f \in C^\infty(E)$ pontosan akkor k-adrendben homogén, ha $Zf = kf$.

:: A klasszikus Euler-tétel igazolásánál bevált fogás - mutatis mutandis - egyszerűen átvihető vektornyaláb kontextusba. ::

/5.1.2/ lemma /P. Dombrowski/ Ha a $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény elsőrendben homogén és a σ pontban létezik a /Fréchet-féle/ deriváltja, akkor h lineáris függvény.

:: Az észrevétel az érdekes és fontos, belátása könnyű gyakorlat - ld. pl. [Do] vagy [Sp], II.8.58. ::

/5.1.3/ példa Tekintsük ξ $(\pi^{-1}(\mathcal{U}); (x^i), (y^\alpha))$ vektortérképének koordinátafüggvényeit. Mivel

$$Zx^i = \left(y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)x^i = 0, \quad Zy^\alpha = \left(y^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta}\right)y^\alpha = y^\alpha,$$

az x^i koordinátafüggvények nulladrendben, az y^α függvények elsőrendben homogének.

/5.2/ A ξ vektornyaláb totáltéren adott X vektormezőről akkor mondjuk, hogy k-adrendben homogén, ha

$$\mathcal{L}_Z X = [Z, X] = (k-1)X \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

/5.2.1/ példa A kanonikus vektormező és a $\frac{\partial}{\partial x^i}$ koordinátavektormezők elsőrendben, a $\frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ vertikális koordinátavektormezők nulladrendben homogének.

/5.1.3/-mal és /5.2.1/-gyel összecsengő eredményt fogalmaz meg az

/5.2.2/ lemma A ξ totálterén adott $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} + Y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ vektormező pontosan akkor k-adrendben homogén, ha

$$ZX^i = (k-1)X^i \ (i \in \underline{n}), \quad ZY^\alpha = kY^\alpha \ (k \in \underline{r}),$$

vagyis ha a megfelelő koordinátafüggvények $(k-1)$-edrendben ill. k-adrendben homogének.

:: /5.2.1/ figyelembevételével

$$\mathcal{L}_Z X = \mathcal{L}_Z\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) + \mathcal{L}_Z\left(Y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) = (ZX^i)\frac{\partial}{\partial x^i} + X^i \mathcal{L}_Z \frac{\partial}{\partial x^i} +$$

$$+ (ZY^\alpha)\frac{\partial}{\partial y^\alpha} + Y^\alpha \mathcal{L}_Z \frac{\partial}{\partial y^\alpha} = (ZX^i)\frac{\partial}{\partial x^i} + (ZY^\alpha - Y^\alpha)\frac{\partial}{\partial y^\alpha},$$

ahonnan /5.1.1/ alapján adódik az állítás. ::

<u>/5.2.3/ következmény</u> Ha $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \in \mathfrak{X}(E) \mid \pi^{-1}(\mathcal{U})$ elsőrendben homogén, akkor $\forall \alpha \in \underline{r},\ x \in \mathcal{U}$: $Y^\alpha \upharpoonright E_x$ <u>lineáris</u> s igy $Y^\alpha = (Y^\alpha_\beta \circ \pi) y^\beta$ $\left(Y^\alpha_\beta \in C^\infty(\mathcal{U});\ \alpha, \beta \in \underline{r} \right)$ irható.

:: Az állítást /5.2.2/ és /5.1.2/ közvetlenül implikálja. ::

Homogenitással kapcsolatos megállapitásaink birtokában további fontos észrevételek nyerhetők az $\mathfrak{X}_V E$ modulus szerkezetéről.

<u>/5.2.4/ lemma</u> Legyen $\xi = (E, \pi, M)$ vektornyaláb. $X \in \mathfrak{X}_V E$ pontosan akkor vertikális liftje ξ egy metszetének, ha nulladrendben homogén, azaz ha $[Z, X] = -X$.

:: Ha – lokálisan – $X = k^* \sigma = (\sigma^\alpha \circ \pi) \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ $(\sigma \in \mathrm{Sec}\, \xi \mid \mathcal{U})$, akkor $[Z, X] = \left[y^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta}, (\sigma^\alpha \circ \pi) \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right] = (\sigma^\alpha \circ \pi) \left[y^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta}, \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right] = -(\sigma^\alpha \circ \pi) \frac{\partial}{\partial y^\alpha} =$ $= -X$. Megforditva, ha $X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \in \mathfrak{X}_V E \mid \pi^{-1}(\mathcal{U})$ és $[Z, X] = -X$, akkor /5.2.2/ értelmében az X^α függvények nulladrendben homogének s igy – speciálisan – $\forall \alpha \in \underline{r},\ z \in E_x$: $X^\alpha(z) = X^\alpha(0 \cdot z) = X^\alpha(\sigma)$. Ez azt jelenti, hogy az $X^\alpha \upharpoonright E_x$ leszükitések konstansok; ilymódon $\forall \alpha \in \underline{r}$: $X^\alpha = \sigma^\alpha \circ \pi,\ \sigma^\alpha \in C^\infty(M)$. ::

<u>/5.2.5/ következmény</u> Az $\mathfrak{X}_V E$ Lie-algebra centruma $\{\sigma\}$.

:: Ha az X vektormező benne van $\mathfrak{X}_V E$ centrumában, akkor – speciálisan – kommutál minden vertikális lifttel s igy /4.4.4/ miatt maga is vertikális liftje egy metszetnek. Ez /5.2.4/ folytán azt vonja maga után, hogy $[Z, X] = -X$. Ugyanakkor – lévén szó centrumelemről – $[Z, X] = [X, Z]$ is fennáll, amiből $-X = X$, $X = \sigma$ következik. ::

<u>/5.2.6/ lemma</u> A ξ totálterén adott $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ vektormezőnek a Liouville-vektormező szerinti Lie-deriváltja akkor és csak akkor vertikális, ha az X^i koordinátafüggvények nulladrendben homogének.

:: /5.2.1/ alkalmazásával /miként /5.2.2/ bizonyitásában/

$$\mathcal{L}_Z X = \mathcal{L}_Z \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) + \mathcal{L}_Z \left(Y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right) = (Z X^i) \frac{\partial}{\partial x^i} + (Z Y^\alpha - Y^\alpha) \frac{\partial}{\partial y^\alpha};$$

innen világos, hogy $\mathcal{L}_Z X \in \mathfrak{X}_V E \Longleftrightarrow \forall i \in \underline{n} : Z X^i = 0$. ::

/5.3/ Függvények és vektormezők homogenitása után elsőrendű differenciálformák homogenitásáról szólunk röviden. Az értelmezés: $\omega \in \mathcal{X}^*E$ k -adrendben homogén, ha $\mathcal{L}_Z\omega = k\omega$ / E a ξ vektornyaláb totáltere, $k \in \mathbb{Z}$ /. Az eddigiek mintájára végzett egyszerű számolással igazolható az

/5.3.1/ lemma A szokásos koordinátafüggvények differenciáljai közül a dx^i 1 -formák nulladrendben, a dy^α 1 -formák elsőrendben homogének. Az $\omega = \omega_i dx^i + \eta_\alpha dy^\alpha \in \mathcal{X}^*E|\pi^{-1}(\mathcal{U})$ 1 -forma pontosan akkor k -adrendben homogén, ha megfelelő koordinátafüggvényei k-adrendben ill. $(k-1)$ -adrendben homogének:

$$\mathcal{L}_Z\omega = k\omega \iff Z\omega_i = k\omega_i \ (i \in \underline{n}) \wedge Z\eta_\alpha = (k-1)\eta_\alpha \quad (\alpha \in \underline{r}). ::$$

Emlékeztetünk rá, hogy egy $\omega \in \mathcal{T}^0_\ell E$ kovariáns ℓ -tenzort /speciálisan egy $\omega \in A^\ell E$ ℓ -formát/ szemibázikusnak mondanak, ha $\omega(X_1, \dots, X_\ell) = 0$, valahányszor az $X_i \in \mathcal{X}(E)$ $(i \in \underline{\ell})$ vektormezők valamelyike vertikális /v.ö. [Go]/; egy $\omega \in A^\ell E$ ℓ -formát bázikusnak neveznek, ha $\exists\ \lambda \in \mathcal{X}^*M$:

$$\omega = \pi^*\lambda \ :\iff \forall z \in E,\ v_i \in T_zE\ (i \in \underline{\ell}):\ \omega(v_1, \dots, v_\ell) = \lambda\big(T_z\pi(v_1), \dots, T_z\pi(v_\ell)\big)$$

/ld. pl. [Bel], 1.6/.

/5.3.2/ lemma $\omega \in \mathcal{X}^*E$ pontosan akkor bázikus, ha szemibázikus és nulladrendben homogén.

:: Ha $\omega \in \mathcal{X}^*E$ bázikus, mondjuk $\omega = \pi^*\eta$, akkor lokálisan $\omega = (\eta_i \circ \pi)\,dx^i$ írható, ahol $\eta_i \in C^\infty(M)$, $i \in \underline{n}$. Innen világos, hogy szemibázikus és nulladrendben homogén. Megfordítva, ha $\omega = \omega_i dx^i + \tilde{\omega}_\alpha dy^\alpha \in \mathcal{X}^*E|\pi^{-1}(\mathcal{U})$ szemibázikus, akkor $\omega\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) = \tilde{\omega}_\alpha = 0\ (\alpha \in \underline{r})$ miatt $\omega = \omega_i dx^i$. Amennyiben $\mathcal{L}_Z\omega = 0$ is teljesül, /5.3.1/ figyelembevételével $\omega_i = \lambda_i \circ \pi$, $\lambda_i \in C^\infty(M)\ (i \in \underline{n})$ adódik, ami azt jelenti, hogy ω bázikus. ::

/5.4/ Ha $M, N \in \mathcal{M}$ és $f \in C^\infty(M,N)$, egy $X: M \to TM$ vektormezőt /f által/ vetíthetőnek mondunk, ha van olyan $\tilde{X}: N \to TN$ vektormező, hogy $Tf \circ X = \tilde{X} \circ f$. Ez az egyszerű, általános és igen fontos fogalom J.L. Koszultól származik /ld. [Ko]/. Számunkra a fibrált tereknek, ill. speciálisan a vektornyaláboknak a projekcióleképezés által vetíthető vektormezői lesznek különös érdekességűek, ezekkel kapcsolatban teszünk most néhány észrevételt.

<u>/5.4.1/ lemma</u> Legyen $\xi = (E, \pi, M) \in VB$, $X \in \mathfrak{X}(E)$. X -hez <u>legfőljebb</u> egy olyan $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező létezik, amelyre $T\pi \circ X = \tilde{X} \circ \pi$ teljesül; ehhez szükséges és elegendő $\mathcal{L}_{\mathfrak{z}} X = [\mathfrak{z}, X] \in \mathfrak{X}_V E$ fennállása.

:: Ha $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \in \mathfrak{X}(E) \big| \pi^{-1}(\mathcal{U})$ vetithető, akkor $\forall z_1, z_2 \in E_x: \; T_{z_1}\pi[X(z_1)] = T_{z_2}\pi[X(z_2)] \in T_x M \Longleftrightarrow$

$\forall z_1, z_2 \in E_x$, $i \in \underline{n}$: $X^i(z_1) = X^i(z_2) \Longrightarrow X^i \restriction E_x$ konstans, $X^i = \tilde{X}^i \circ \pi$, $\tilde{X}^i \in C^\infty(M)$. Innen kiolvasható az egyértelműségi állitás és az is, hogy vetithetőség esetén az X^i koordinátafüggvények nulladrendben homogének. /5.2.6/ miatt ekkor $\mathcal{L}_{\mathfrak{z}} X \in \mathfrak{X}_V E$. Megforditva, $\mathcal{L}_{\mathfrak{z}} X \in \mathfrak{X}_V E$ teljesülésekor - szintén /5.2.6/-ra való hivatkozással - $X^i = \tilde{X}^i \circ \pi$, $\tilde{X}^i \in C^\infty(M)$ $(i \in \underline{n})$ adódik, ami azt jelenti, hogy X vetithető. ::

<u>/5.4.2/ lemma</u> Az $X \in \mathfrak{X}(E)$ vektormező vetithetősége egyenértékű olyan $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező létezésével, amelyre $\forall \omega \in \mathfrak{X}^* M: \; \pi^* \mathcal{L}_{\tilde{X}} \omega = \mathcal{L}_X \pi^* \omega$.

:: Ha - lokálisan - $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$, $\tilde{X} = \tilde{X}^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, $\omega = \omega_i du^i$, akkor $\pi^* \omega = (\omega_i \circ \pi) dx^i$; igy

$$\mathcal{L}_X \pi^* \omega = \left(X^j \frac{\partial(\omega_i \circ \pi)}{\partial x^j} + (\omega_j \circ \pi) \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) dx^i ,$$

mig

$$\pi^* \mathcal{L}_{\tilde{X}} \omega = \left((\tilde{X}^j \circ \pi)\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial u^j} \circ \pi\right) + (\omega_j \circ \pi)\left(\frac{\partial \tilde{X}^j}{\partial u^i} \circ \pi\right)\right) dx^i ,$$

tehát $\mathcal{L}_X \pi^* \omega = \pi^* \mathcal{L}_{\tilde{X}} \omega \Longleftrightarrow \forall j \in \underline{n}: X^j = \tilde{X}^j \circ \pi$. Ez /5.4.1/ és /5.2.6/ alapján az állitást adja. ::

<u>/5.4.3/ lemma</u> Legyen $\xi = (E, \pi, M) \in FS(M)$ s jelölje $\mathfrak{X}_p E$ $\mathfrak{X}(E)$ projektálható vektormezőinek halmazát:

$$\mathfrak{X}_p E := \left\{ X \in \mathfrak{X}(E) \,\middle|\, \exists \tilde{X} \in \mathfrak{X}(M): T\pi \circ X = \tilde{X} \circ \pi \right\}.$$

Ekkor $\mathfrak{X}_p E$ Lie-részalgebrája az $\mathfrak{X}(E)$ Lie-algebrának.

:: $X, Y \in \mathfrak{X}_p(E)$ esetén $X \overset{\pi}{\sim} \tilde{X}, Y \overset{\pi}{\sim} \tilde{Y}$ irható alkalmas $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőkkel. Ekkor $[X, Y] \overset{\pi}{\sim} [\tilde{X}, \tilde{Y}]$, tehát $[X, Y] \in \mathfrak{X}_p E$. ::

<u>/5.4.4/ lemma</u> $\mathfrak{X}_p E$ Lie-modulus a $C^\infty(M) \cong \pi^* C^\infty(M)$ algebra fölött, az $(\mathfrak{X}_p E, \pi_*, \mathfrak{X}(M))$ hármas pedig - ahol $\pi_*: X \in \mathfrak{X}_p E \mapsto \tilde{X}$, ha $X \overset{\pi}{\sim} \tilde{X}$ - <u>Lie-nyaláb</u>. E Lie-nyaláb vertikális modulusa éppen $\mathfrak{X}_V E$.

:: Triviális. ::

/5.5/ Illusztrációként – szem előtt tartva a későbbi alkalmazások igényeit is – bemutatunk egy fontos eljárást /speciális/ vetithető vektormező konstruálására – Legyen $X \in \mathcal{X}(M)$ s tegyük föl az egyszerüség kedvéért, hogy X -nek van

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M, \quad (t,x) \longmapsto \varphi(t,x)$$

globális folyama. Ekkor – tetszőlegesen rögzitve egy egy pontot és élve a /4.4.1/-beli jelöléshasználat megfelelőjével –

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \dot{\varphi}_x(t) = X[\varphi_x(t)] .$$

A φ folyam a

$$\check{\varphi} : \mathbb{R} \times TM \longrightarrow TM, \quad (t,v) \longmapsto \check{\varphi}(t,v) := T\varphi_t(v)$$

értelmezéssel természetes módon kiterjeszthető TM -re. A kiterjesztett folyam sebességvektormezőjét X^c -vel jelöljük s az X vektormező komplett liftjének nevezzük. Tehát a komplett lift definiciója:

$$X^c : TM \longrightarrow TTM, \quad v \longmapsto X^c(v) := \dot{\check{\varphi}}_v(0) .$$

/ X^c -nek eltérő konstrukciói is ismeretesek, ld. pl. [YaI], p.14./. Rutin számolással adódik az

/5.5.1/ lemma Legyen $(\mathcal{U}; (u^i)_{i=1}^n)$ térkép M -en, $(\pi_M^{-1}(\mathcal{U}); (x^i), (y^i))$ pedig az indukált térkép TM -en. Ha $X \in \mathcal{X}(M)$ és $X \restriction \mathcal{U} = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, akkor $X^c \restriction \pi_M^{-1}(\mathcal{U}) = (X^i \circ \pi_M)\frac{\partial}{\partial x^i} + y^j \left(\frac{\partial X^i}{\partial u^j} \circ \pi_M\right)\frac{\partial}{\partial y^i}$. ::

X^c koordinátaelőállitásából kiolvasható az

/5.5.2/ következmény Vektormező komplett liftje nulladrendben homogén s igy speciálisan vetithető. ::

A komplett lift birtokában az érintőnyaláb vetithető vektormezőire a következő jellemzést kapjuk /v.ö. [YaI], p.15/:

/5.5.3/ lemma $X \in \mathcal{X}(TM)$ vetithetőségének szükséges és elegendő feltétele olyan $\tilde{X} \in \mathcal{X}(M)$ vektormező létezése, amelyre $X - \tilde{X}^c \in \mathcal{X}_v TM$ teljesül.

:: Ha $X \in \mathcal{X}(TM)$, $\tilde{X} \in \mathcal{X}(M)$ és $X - \tilde{X}^c \in \mathcal{X}_v E$, akkor $[Z, X - \tilde{X}^c] = [Z, X] - [Z, \tilde{X}^c] \in \mathcal{X}_v E$ //4.3//, s mivel itt /5.5.2/ és /5.4.1/ miatt $[Z, \tilde{X}^c]$ ugyancsak vertikális, következik, hogy $[Z, X] = \mathcal{L}_Z X \in \mathcal{X}_v E$. Ez – ismét /5.4.1/-re való hivatkozással – azt jelenti, hogy $X \in \mathcal{X}_p E$.

- Megforditva, $X \in \mathcal{X}_p E$ esetén van olyan $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(M)$ vektormező, hogy $X \overset{\pi}{\sim} \widetilde{X}$. Mivel egyben $\widetilde{X}^c \overset{\pi}{\sim} \widetilde{X}$ is fennáll, kapjuk, hogy $X - \widetilde{X}^c \overset{\pi}{\sim} 0$, azaz $X - \widetilde{X}^c \in \mathcal{X}_V E$ ::

6.§. Affin nyalábok. Jetek

/6.1/ Igen fontosak az olyan fibrált terek, amelyek ugyan nem vektornyalábok, de fibrumaik affin terek. Mielőtt rátérnénk áttekintésünkre, néhány egyszerű alapfogalmat elevenitünk föl a szóhasználat rögzitése végett. - Ha A nemüres halmaz, G additiv módon irt csoport s adva van egy

$$A \times G \longrightarrow G, \quad (a,g) \longmapsto a+g$$

leképezés, amelyre

$$\forall a \in A;\ g,h \in G: \quad a+(g+h) = (a+g)+h, \quad a+\sigma = a,$$

akkor azt mondjuk, hogy G /balról/ <u>hat</u> az A halmazon. A csoporthatás <u>tranzitiv</u>, ha $\forall a, b \in A: \exists g \in G: b = a+g$. $G_a := \{g \in G \mid a+g = a\}$ az $a \in A$ pontbeli izotrópia alcsoport; a csoporthatás <u>szabad</u>, ha $\forall a \in A: G_a = \{\sigma\}$. <u>Affin téren</u> olyan $(A;V)$ párt értünk, ahol A nemüres halmaz, V pedig vektortér, amely - mint Abel-csoport - tranzitiven és szabadon hat A -n. "$(A;V)$ affin tér" helyett a szokásos, megengedett pontatlansággal gyakran emlitünk egyszerüen A affin teret./ Közvetlenül adódik, hogy az affin tér axiómái lehetővé teszik egy

$$- : A \times A \longrightarrow V, \quad (a,b) \longmapsto a-b$$

un. <u>differencia-leképezés</u> leképezés értelmezését a $b+(a-b) := a$ előirással. Ekkor az

$$0_a : A \longrightarrow V, \ b \longmapsto a-b \quad (a \in A \ \text{rögzitett})$$

leképezés <u>bijekció</u>, teljesül továbbá, hogy

$$\forall a,b,c \in A: \quad (a-b)+(b-c)+(c-a) = \sigma.$$

Megforditva, ha a most mondott két tulajdonságot irjuk elő axiómaként egy $-: A\times A \longrightarrow V$ leképezésre, akkor egyértelmüen létezik olyan $A\times V \longrightarrow A$ csoporthatás, amely $(A;V)$ -t affin térré teszi, a megadott "-" leképezéssel mint differencialeképezéssel. Affin tér definiálására az emlitett két alternativa közül külön kommentár nélkül fogjuk választani az adott szituációban alkalmasabbnak igérkezőt. Triviális, de jellegzetes példái az affin tereknek a vektorterek lineáris sokaságai: ha "a" vektora, H altere egy V vektortérnek, $A := a+H$ és

$$-: A\times A \longrightarrow H,\ (a+h, a+k) \longmapsto h-k,$$

akkor $(A;H)$ affin tér /s igy speciálisan affin tér maga V is/. - Tekintsünk végül egy $(A;V)$ s egy $(A';V')$ affin teret. A $\varphi: A \longrightarrow A'$ leképezést affinnak nevezzük, ha

$$\exists\ D\varphi \in Hom(V,V'):\ \forall a,b \in A:\ \varphi(a)-\varphi(b) = D\varphi(a-b);$$

ekkor $D\varphi$ -t a φ -hez tartozó differencia-leképezésként emlitjük.

/6.2/ Legyen $\xi = (E,\pi,M) \in VB(M)$, $\mathcal{A} = (A,\varrho,M) \in FS(M)$. Az $(\mathcal{A},\xi)$ pár - ill. egyszerüen $\mathcal{A}$ - ξ -vel mint csatolt vektornyalábbal rendelkező affin nyaláb, ha teljesiti a következő axiómákat:

/AB1/ $\forall x\in M:\ (A_x; E_x)$ affin tér;

/AB2/ az $E\times_M A \longrightarrow A,\ (z,a) \longmapsto z+a$ leképezés sima.

Amennyiben $\bar{\mathcal{A}} = (\bar{A},\bar{\pi},\bar{M})$ további affin nyaláb, $(f,g) \in Mor(\mathcal{A},\bar{\mathcal{A}})$ és

$$\forall x\in M:\ f\restriction A_x : A_x \longrightarrow \bar{A}_{g(x)}$$

affin leképezés, ugy az (f,g) morfizmust affin $(AB-)$ morfizmusnak mondjuk. - Az affin nyaláb elnevezés jogos, érvényes ui. a

/6.2.1/ lemma Minden affin nyaláb egyben nyaláb is.

:: Legyen $\mathcal{A} = (A,\varrho,M)$ affin nyaláb, $\xi = (E,\pi,M)$ -mel, mint csatolt vektornyalábbal. $\mathcal{A} \in FS(M)$ lévén, M minden pontjának megadható olyan $\mathcal{U}$ környezete, amely fölött létezik $\sigma: \mathcal{U} \longrightarrow A$ /lokális/ metszet //2.1//. Ha

$$f: \varrho^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}),\ b \longmapsto f(b) := \sigma\circ\varrho(b) - b,$$

akkor //6.1// $f\restriction A_x = 0_{v(x)}$, következőleg f bijekció. /AB2/ egyszerű alkalmazásával kapjuk, hogy az f bijekció ténylegesen diffeomorfizmus $\varrho^{-1}(\mathcal{U})$ és $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ között. Mivel ξ /speciálisan/ nyaláb, ebből közvetlenül adódik, hogy $\mathcal{A}$ is nyaláb. ::

A lineáris sokaságok és az affin terek közötti kapcsolat "fibrált megfelelőjéről" szól a könnyen igazolható, de igen hasznos

/6.2.2/ lemma Legyen $\xi = (E, \pi, M) \in VB(M)$ s tegyük föl, hogy $\tilde{\xi} = (\tilde{E}, \tilde{\pi}, M) \in VB(M)$ résznyalábja ξ -nek. Egy $v : M \longrightarrow E$ metszet rögzitése után képezzük az $A = \bigsqcup_{x \in M} (v(x) + \tilde{E}_x)$ diszjunkt uniót. Ha $\mathcal{A} := (A, \varrho, M)$ $(\varrho : A \longrightarrow M$ a természetes projekció/, akkor $(\mathcal{A}, \tilde{\xi})$ affin nyaláb. ::

A /6.2.2/-ben konstruált affin nyalábot a ξ vektornyaláb egy affin résznyalábjának vagy - közelebbről - $\tilde{\xi}$ v általi eltoltjának mondjuk.

/6.2.3/ lemma Legyen $(\mathcal{A}, \xi)$ /$\mathcal{A} = (E, \varrho, M)$ és $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\xi})$ affin nyaláb, $(\varphi, \psi) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{A}, \tilde{\mathcal{A}})$ AB -morfizmus. -

$$\exists!\ (f, g) \in \mathrm{Mor}(\xi, \tilde{\xi}) :\ \forall (z, a) \in E \times_M A :\ \varphi(z + a) = f(z) + \varphi(a).$$

:: A kijelentés közvetlenül adódik az affin és a lineáris leképezések közötti, definició által előirt //6.1// kapcsolatból. ::

A τ_E lineáris érintőnyaláb és a $T\xi$ tangens fibrálás //2.6// után most leirjuk a harmadik fontos, TE totálterű nyalábot.

/6.2.4/ lemma Tegyük föl, hogy $\xi = (E, \pi, M) \in FS(M)$. - Az

$$\mathcal{A}\tau_E = (TE,\ (\tau_E, T\pi),\ E \times_M TM)$$

hármas egyértelmű módon olyan affin nyalábbá tehető, amelynek csatolt vektornyalábja - ha eltekintünk egy triviális pull-backtől - a $V\xi$ vertikális nyaláb.

:: Világos, hogy $\mathcal{A}\tau_E$ fibrált tér, amelynek a $(z, v) \in E \times_M TM$ pont fölötti fibruma $(TE)_{(z,v)} = \{a \in T_z E \mid T_z \pi(a) = v\}$.

Ez azt jelenti, hogy $(TE)_{(z,v)}$ éppen a $T_z \pi(a) = v$ lineáris egyenlet megoldó lineáris sokasága. Mivel a megfelelő homogén egyenlet /nevezetesen $T_z \pi(x) = 0$ / megoldásai éppen a $V_z E$ vertikális alteret alkotják, következik, hogy $(TE)_{(z,v)} = a_0 + V_z E$;

$a_0 \in T_t E \wedge T_t\mathfrak{r}(x_0) = v$. Ha tehát $\mathfrak{a}: E \times_M TM \longrightarrow TE$ /lokális/ metszete az $\mathcal{A}\tau_E$ fibrált térnek, akkor /legalábbis lokálisan/ $TE = \bigsqcup_{(t,v)\in E\times_M TM} (\mathfrak{a}(t,v) + V_t E)$ irható, amiből /6.2.2/ analógiájára adódik, hogy $\mathcal{A}\tau_E$ affin nyaláb, $p_1^* V\xi$ -vel, mint csatolt vektornyalábbal. ::

/6.3./ Továbbra is a $\xi = (E, \pi, M)$ fibrált téren dolgozunk.

Legyen $\mathcal{U}$ nyilt halmaza a bázissokaságnak s tekintsük a $\sigma, \tau : \mathcal{U} \longrightarrow E$ lokális metszeteket. - Akkor mondjuk, hogy σ és τ elsőrendben érintkezik az $x \in \mathcal{U}$ pontban, ha $D\sigma(x) = D\tau(x)$, azaz //3.1// ha $\forall v \in T_x M : T_x\sigma(v) = T_x\tau(v)$. /3.4.2/-ből azonnal adódik, hogy a koordinátafüggvények //3.3// nyelvén az x -beli elsőrendű érintkezés kritériuma

$$\sigma(x) = \tau(x) \;\wedge\; \forall (\alpha, i) \in \underline{k} \times \underline{n} : \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial u^i}(x) = \frac{\partial \tau^\alpha}{\partial u^i}(x)$$

teljesülése. Közvetlenül világos, hogy a $\sigma \underset{x}{\sim} \tau :\Longleftrightarrow D\sigma(x) = D\tau(x)$ reláció ekvivalenciareláció; σ ekvivalenciaosztályát $j_x\sigma$ -val jelöljük s azt mondjuk, hogy $j_x\sigma$ a σ metszet által reprezentált elsőrendű jet, röviden 1-jet. Alkalmazzuk a szokásos

$$J_x E := \bigcup_{\sigma \in \operatorname{Sec}\xi} j_x\sigma \quad , \quad J E := \bigsqcup_{x\in M} J_x E$$

jelölést s JE -t 1-jet térnek nevezzük. A $p: JE \longrightarrow E$, $j_x\sigma \longmapsto \sigma(x)$ leképezést cél-projekcióként /"target"/, a $s := \pi \circ p : JE \longrightarrow M$, $j_x\sigma \longmapsto x$ leképezést pedig tám-projekcióként /"source"/ említjük. - Megjegyezzük, hogy magasabbrendű jetek értelmezése - a kapcsolatos konstrukciókkal egyetemben - analóg módon történhet, számunkra azonban elegendőek lesznek az 1-jetek.

/6.3.1/ lemma Megtartva a bevezetett jelöléseket, legyen $j_x\sigma, j_x\tau \in J_x E$. Ekkor $j_x\sigma = j_x\tau \Longleftrightarrow D^V\sigma(x) = D^V\tau(x)$.

:: Kijelentésünk az iménti észrevételekből és /4.4.2/-ből nyilvánvaló. ::

/6.3.2/ lemma Vegyük alapul a $\xi = (E, \pi, M)$ fibrált teret.

- Egyértelműen létezik a JE 1-jet téren olyan sokaságstruktura, amely mind az $\mathcal{A}J\xi = (JE, p, E)$, mind a $J\xi = (JE, s, M)$ hármast fibrált térré teszi. Amennyiben ξ

nyaláb, ugy $\mathcal{A}J\xi$ és $J\xi$ is az; ha ráadásul ξ vektornyaláb, akkor $J\xi$ szintén vektornyaláb a $j_x\sigma + j_x\tau := j_x(\sigma+\tau)$, $\lambda j_x\sigma := j_x(\lambda\sigma)$ $(\lambda\in\mathbb{R})$ lineáris operációkkal. - A $J\xi$ /vektor/ nyalábot ξ <u>1-jet nyalábj</u>ának hivjuk.

:: A rövidség kedvéért /s figyelembe véve az alkalmazásra kerülő gondolatmenet későbbi hasznosithatóságát/ csupán azt a részállitást világitjuk meg, amelyben ξ -ről föltesszük, hogy nyaláb. Tekintsük ekkor egy megfelelő $\mathcal{U}\subset M$ nyilt halmaz fölött a /3.3/-ban leirt $(\pi^{-1}(\mathcal{U}), (x^i), (y^\alpha))$ fibrált térképet, emlékeztetve arra, hogy itt $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ egy φ leképezés révén diffeomorf az $\mathcal{U}\times F$ szorzatsokasággal, ahol F a fibrumtipus. Jelölje $J[\pi^{-1}(\mathcal{U})]$ az $\mathcal{U}$ fölötti metszetek segitségével képzett 1 -jetek halmazát. Ekkor az

$$f: J[\pi^{-1}(\mathcal{U})] \longrightarrow \mathcal{U}\times F\times\mathbb{R}^{rn},\ j_x\sigma \longmapsto \left(\varphi[\sigma(x)], \left(\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial u^i}(x)\right)\right)$$

leképezés <u>bijekció</u>, amely a

$$\begin{tikzcd}
J[\pi^{-1}(\mathcal{U})] \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[d, "p\restriction\pi^{-1}(\mathcal{U})"'] & & \mathcal{U}\times F\times\mathbb{R}^{rn} \arrow[d, "\text{projekció}"] \\
\pi^{-1}(\mathcal{U}) \arrow[rr, "\varphi"'] & & \mathcal{U}\times F
\end{tikzcd}$$

diagramot kommutativvá teszi. E bijekciók egzisztenciája ismert módon /ld. pl. [GHV], I. §3, Prop. X/ garantálja a kivánt / E fölötti/ nyaláb-struktura létezését. ::

<u>/6.3.3/ következmény</u> Véve a szokásos $(\pi^{-1}(\mathcal{U}); (x^i), (y^\alpha))$ fibrált térképet a $\xi = (E, \pi, M)$ nyalábon, legyen $\check{x}^i := x^i\circ p$, $\check{y}^\alpha := y^\alpha\circ p$, $y^\alpha_i := \left(\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial u^i}(x)\right)$ $\left((\alpha,i)\in\underline{r}\times\underline{n}\right)$. Ekkor $\left(p^{-1}[\pi^{-1}(\mathcal{U})]; (\check{x}^i), (\check{y}^\alpha), (y^\alpha_i)\right)$ térkép a JE -jet tér számára. - Az igy nyert térképet JE egy <u>természetes térképe</u>ként, az erre vonatkozó koordinátákat <u>természetes koordinátá</u>kként emlitjük. ::

<u>/6.3.4/ lemma</u> Tetszőleges $\xi = (E, \pi, M)$ fibrált tér esetén $(\mathcal{A}J\xi, \tau^*_M\otimes V\xi)$ affin nyaláb.

:: Legyen $\sigma: \mathcal{U}\longrightarrow E$ /$\mathcal{U}\subset M$ nyilt halmaz/ lokális metszete ξ -nek. Először is egy természetes bijekciót adunk meg az $\mathcal{A}J\xi$ fibrált tér tetszőleges $(JE)_{\sigma(x)}$ $(x\in\mathcal{U})$ fibruma s a

$Hom(T_xM, T_{\sigma(x)}E)$ vektortér egy alkalmas lineáris sokasága között. - Értelmezzük a $\theta: (\mathfrak{J}E)_{\sigma(x)} \longrightarrow Hom(T_xM, T_{\sigma(x)}E)$ leképezést a $\theta(j_x\sigma) := T_x\sigma$ előírással! /6.3.1/ és D^v definiciója //4.4// alapján azonnal adódik ekkor, hogy θ injektiv, nyilvánvaló továbbá a $T_{\sigma(x)}\pi \circ \theta(j_x\sigma) = 1_{T_xM}$ reláció teljesülése.

Megforditva, ha $\psi \in Hom(T_xM, T_zE)$ $(\pi(z) = x)$ és $T_x\pi \circ \psi = 1_{T_xM}$, akkor egyszerü számolással kapjuk, hogy ψ -t a T_xM -ben ill. T_zE -ben rögzitett szokásos bázisokra vonatkozóan

$$\begin{bmatrix} \delta^i_j \\ \hline A^\alpha_j \end{bmatrix}$$

alaku $(n+r)\times n$ -es matrix reprezentálja.

Vegyük azt $\sigma: \mathcal{U} \longrightarrow E$ $(x \in \mathcal{U})$ lokális metszetet, amelynek koordinátafüggvényei $y^\alpha \circ \sigma = \sigma^\alpha := A^\alpha_j u^j$ $(\alpha \in \underline{r})$. Világos, hogy ilyen választás mellett $\psi = T_x\sigma = \theta(j_x\sigma)$, tehát $\psi \in Im\,\theta$, azaz θ szürjektiv. A

$$\theta: (\mathfrak{J}E)_{\sigma(x)} \longrightarrow \{\psi \in Hom(T_xM, T_{\sigma(x)}E) \mid T_{\sigma(x)}\pi \circ \psi = 1_{T_xM}\}$$

leképezés ilymódon bijekció és $Im\,\theta$ lineáris sokasága $T_x^*M \otimes T_{\sigma(x)}E$ -nek, mégpedig a $Hom(T_xM, V_{\sigma(x)}E)$ altér eltoltja. Azonositva $(\mathfrak{J}E)_{\sigma(x)}$ -et $Im\,\theta$ -val, a /6.2.2/-beli konstrukciós elv alkalmazásával következik az állitás. ::

Egy egyszerü és jólismert, de igen hasznos észrevétellel /v.ö. pl. [Gol] vagy [Fu]; p.110/ zárjuk e § meggondolásait.

/6.3.5/ lemma Legyen $\xi = (E, \pi, M) \in VB$ s tekintsük a $\mathfrak{J}\xi = (\mathfrak{J}E, p, M)$ vektornyalábot. Ha tetszőleges $f \in C^\infty(M)$, $\sigma \in Sec\,\xi$ és $x \in M$ esetén $i(df(x) \otimes \sigma(x)) := j_x((f - f(x))\sigma)$ és - mint fentebb - $p(j_x\sigma) := \sigma(x)$, akkor a

$$0 \longrightarrow \tau^*_M \otimes \xi \xrightarrow{i} \mathfrak{J}\xi \xrightarrow{p} \xi \longrightarrow 0$$

sorozat vektornyalábok rövid egzakt sorozata.

:: Világos, hogy $i \in Mor_M(\tau^*_M \otimes \xi, \mathfrak{J}\xi)$, $p \in Mor_M(\mathfrak{J}\xi, \xi)$, s könnyen ellenőrizhető $Ker\,i = \{0\}$ teljesülése - mig $Im\,p = \xi$ evidens -. Mivel $p(j_x(f - f(x)\sigma)) = ([f - f(x)]\sigma)(x) = (f(x) - f(x))\sigma(x) = 0$, $p \circ i = 0$ - tehát $Im\,i \subset Ker\,p$. A forditott irányu tartalmazás ugyancsak egyszerüen látható. ::

7.§. Konstrukciók jet-téren

/7.1/ Az egyszerűség kedvéért ebben a §-ban végig egy $\xi = (E, \pi, M)$ nyaláb fölött dolgozunk. - Tekintsük az $\mathcal{A}J\xi = (JE, p, E)$ affin nyalábot. Mivel a /4.4/-ben értelmezett vertikális differenciálás nyilvánvalóan működik nyalábok általánosságában is, bevezethetünk egy $\vartheta : TJE \longrightarrow VE$ leképezést az

$$u \in T_{j_x\sigma} JE \longmapsto \vartheta(u) := D^v\sigma(x)\left[Tp(u)\right]$$

előírással; ezt a leképezést az $\mathcal{A}J\xi$ /vagy $J\xi$ / nyaláb struktura 1-formájának nevezzük. /A "forma" terminus használata indoklást fog nyerni a 8.§-ban./

/7.1.1/ lemma A JE 1-jet tér természetes koordinátáit használva, a struktura 1-forma koordinátaelőállítása

$$u \in T_{j_x\sigma} JE \longmapsto \vartheta(u) = \left[dy^\alpha - (y^\alpha_i \circ \pi_{JE})dx^i\right](u)\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\sigma(x)}.$$

:: Ha $u = a^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{j_x\sigma} + b^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{j_x\sigma} + b^\alpha_i\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha_i}\right)_{j_x\sigma}$, ugy

$$Tp(u) = a^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\sigma(x)} + b^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\sigma(x)}$$ és /4.4.2/ alapján

$$\vartheta(u) = D^v\sigma(x)\left[Tp(u)\right] = \left[b^\alpha - a^i\left(\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial u^i}(x)\right)\right]\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\sigma(x)}. \quad ::$$

/7.1.2/ következmény A struktura 1-forma nulltere risznyalábja τ_{JE} -nek; e résznyalábnak lokális bázisát képezik a $\frac{\partial}{\partial x^i} + y^\alpha_i\frac{\partial}{\partial y^\alpha}$, $\frac{\partial}{\partial y^\alpha_i}$ $(i \in \underline{n}, \alpha \in \underline{r})$ vektormezők.

::

/7.2/ Legyen $\mathcal{U} \subset M$ nyilt halmaz s tekintsük a ξ nyaláb egy $\sigma : \mathcal{U} \longrightarrow E$ lokális metszetét. σ 1-jet kiterjesztésén a $j\sigma : \mathcal{U} \longrightarrow JE$, $x \longmapsto j\sigma(x) := j_x\sigma$ leképezést értjük; ez nyilvánvalóan lokális metszete $J\xi$ -nek. Megforditva, $J\xi$ egy $s : \mathcal{U} \longrightarrow JE$ /lokális/ metszetét holonomnak mondjuk, ha 1-jet kiterjesztése ξ egy $\mathcal{U}$ fölötti metszetének, azaz ha

$\exists\ \sigma \in Sec\,\xi|\mathcal{U} : \ s = j\sigma.$

/7.2.1/ lemma $J\xi$ egy $s: \mathcal{U} \to JE$ lokális metszete pontosan akkor holonom, ha $s^*\vartheta = 0$, ahol ϑ a struktura 1-forma.

:: Tegyük föl először, hogy s holonom: legyen $s = j\sigma$. Mivel $\forall v \in TM: s^*\vartheta(v) = \vartheta(Ts(v))$ s itt – mint az egyszerü számolással ellenőrizhető –

$$T_x s(v) = T_x j\sigma(v) = v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{j_x\sigma} + v^i \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial u^i}(x)\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{j_x\sigma} +$$
$$+ v^i \frac{\partial^2 \sigma^\alpha}{\partial u^i \partial u^j}(x)\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha_j}\right)_{j_x\sigma} \qquad (x = \pi_M(v)),$$

/7.1.1/ alapján közvetlenül adódik, hogy ebben az esetben

$$s^*\vartheta(v) = \left(v^i \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial u^i}(x) - v^i \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial u^i}(x)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\sigma(x)} = 0.$$

Megforditva, amennyiben az $s: \mathcal{U} \to JE$ metszetre $s^*\vartheta = 0$ teljesül, ugy $\forall x \in \mathcal{U}, v \in T_x M$:

$$s^*\vartheta(v) = \vartheta(Ts(v)) = \left[dy^\alpha - (y^\alpha_i \circ \pi_{JE})dx^i\right](Ts(v))\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{p\circ s(x)} = 0,$$

ahonnan $dy^\alpha[Ts(v)] = y^\alpha_i[s(x)]v(u^i)$ következik. Ha $\sigma := p\circ s$, akkor $y^\alpha \circ s = y^\alpha \circ p \circ s = y^\alpha \circ \sigma = \sigma^\alpha$ és igy

$$T_x s(v) = v^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{s(x)} + v^i \frac{\partial(y^\alpha \circ s)}{\partial u^i}(x)\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{s(x)} + v^i \frac{\partial(y^\alpha_j \circ s)}{\partial u^i}(x)\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha_j}\right)_{s(x)}$$

figyelembevételével az utóbb nyert összefüggés a $v^i \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial u^i}(x) = v^i(y^\alpha_i \circ s)(x)$ alakot ölti. Innen $y^\alpha_i \circ s = \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial u^i}$ $(i \in \underline{n}, \alpha \in \underline{k})$, tehát $s = j\sigma$. ::

/7.3/ Továbbra is a JE-jet téren dolgozunk. – Egy $V \in \mathcal{X}(JE)$ vektormezőről azt mondjuk, hogy infinitezimális kontakt transzformáció /röviditve: i.c.t./, ha rendelkezik a következő tulajdonsággal:

$$\forall X \in \mathcal{X}(E): \operatorname{Im} X \subset \operatorname{Ker}\vartheta \Rightarrow \operatorname{Im} \mathcal{L}_V X \subset \operatorname{Ker}\vartheta.$$

Az i.c.t.-k koordinátaelőállitását irja le a

/7.3.1/ lemma Legyen $\mathcal{U} \subset M$ nyilt halmaz, $V \in \mathcal{X}(JE)$ s tegyük föl, hogy a természetes koordinátákban

$$V \restriction \xi^{-1}(\mathcal{U}) = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + Y^\alpha_i \frac{\partial}{\partial y^\alpha_i}.$$

V pontosan akkor i.c.t., ha koordinátafüggvényei eleget tesznek a

$$\frac{\partial Y^\alpha}{\partial y^\beta_j} = Y^\alpha_i \frac{\partial X^i}{\partial y^\beta_j} , \qquad /1/$$

$$Y^\alpha_i = \frac{\partial Y^\alpha}{\partial \dot{x}^i} + Y^\beta_i \frac{\partial Y^\alpha}{\partial \dot{y}^\beta} - Y^\alpha_j \left(\frac{\partial X^j}{\partial \dot{x}^i} + Y^\beta_i \frac{\partial X^j}{\partial \dot{y}^\beta} \right) \qquad /2/$$

összefüggéseknek.

:: /7.1.2/-re tekintettel elég azt megmutatni, hogy

$$\operatorname{Im}\left[V, \frac{\partial}{\partial y^\alpha_i}\right] \subset \operatorname{Ker} \vartheta \qquad \text{és} \qquad \operatorname{Im}\left[V, \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^\alpha_i \frac{\partial}{\partial y^\alpha_i}\right]$$

teljesülése szükséges és elegendő ahhoz, hogy V i.c.t. legyen. Kissé hosszadalmas, de rutinszerű számolással ellenőrizhető, hogy a fölirt első reláció /1/-gyel, a második /2/-vel ekvivalens. ::

/7.4/ Az i.c.t.-k fontos eszközei a modern variációszámításnak /ld. pl. [Gar2], [MM1], [MM2] /; mi a most bevezetésre kerülő konstrukción keresztül /indirekt/ konnexióelméleti alkalmazásukat fogjuk adni a 15.§-ban. - Legyen $X \in \mathfrak{X}(E)$. X <u>1-jet prolongációján</u> olyan $^1X : \mathfrak{J}E \longrightarrow T\mathfrak{J}E$ <u>i.c.t.</u>-t értünk, amely <u>X-re vetithető</u>. A /7.3/-ban mondottakból közvetlenül dedukálható a

<u>/7.4.1/ lemma</u> Ha $X \in \mathfrak{X}(E)$, $X \restriction \pi^{-1}(\mathcal{U}) = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$, ugy

$$^1X \restriction p^{-1}(\mathcal{U}) = (X^i \circ p)\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} + (Y^\alpha \circ p)\frac{\partial}{\partial \dot{y}^\alpha} + Y^\alpha_i \frac{\partial}{\partial y^\alpha_i} ,$$

ahol az Y^α_i koordinátafüggvények az

$$Y^\alpha_i = \frac{\partial Y^\alpha}{\partial x^i} \circ p + Y^\beta_i \left(\frac{\partial Y^\alpha}{\partial y^\beta} \circ p \right) - Y^\alpha_j \left(\frac{\partial X^j}{\partial x^i} \circ p \right)$$

relációval vannak jellemezve. ::

<u>/7.4.2/ következmény</u> Tegyük föl, hogy $\xi = (E, \pi, M) \in VB$. A $\mathfrak{z} \in \mathfrak{X}_V E$ Liouville-vektormező 1-jet prolongációjának koordinátaelőállitása $^1\mathfrak{z} \restriction p^{-1}(\mathcal{U}) = \dot{y}^\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{y}^\alpha} + y^\alpha_i \frac{\partial}{\partial y^\alpha_i}$, ennélfogva $^1\mathfrak{z}$ a Liouville-vektormező a $\mathfrak{J}E$ a 1-jet téren. ::

Nehézség nélkül, de hosszadalmas számolással ellenőrizhető a

<u>/7.4.3/ lemma</u> Az $X \in \mathfrak{X}(E) \longmapsto {}^1X \in \mathfrak{X}(\mathfrak{J}E)$ leképezés homomorfizmus az $\mathfrak{X}(E)$ és $\mathfrak{X}(\mathfrak{J}E)$ valós Lie-algebrák között. ::

<u>/7.4.4/ következmény</u> Ha $\xi = (E, \pi, M) \in VB$ és $X \in \mathfrak{X}(E)$ elsőrendben homogén, ugy ^1X szintén elsőrendben homogén.

:: Ha $[Z, X] = 0$, akkor /7.4.3/ miatt ${}^1[Z, X] = [{}^1Z, {}^1X] = 0$, s ez /7.4.2/-re tekintettel az állítás helyességét jelenti. ::

8.§. A leszűkített Frölicher-Nijenhuis algebra

/8.1/ Meggondolásainkat egy igen általános szituáció rövid leírásával kezdjük /a részleteket illetően ld. [GHV], II, 7.1-7.10/. - Vegyük alapul a $\xi = (E, \pi, M)$ vektornyalábot, az eddigi gyakorlatnak megfelelően föltételezve, hogy $\dim M = n$, $\mathrm{rang}\,\xi = r$. Legyen $k \in \underline{n}$. Tekintsük a τ_M érintőnyalábot s képezzük azt az $A^k(\tau_M; \xi) \in VB(M)$ vektornyalábot, amelynek tetszőleges $x \in M$ pont fölötti fibruma a $T_xM \times \dots \times T_xM \longrightarrow E_x$ ferdeszimmetrikus k-lineáris leképezések vektortere. E nyaláb metszeteit M fölötti, *ξ-értékű k-formáknak* mondjuk. Az értelmezés szerint tehát

$$\Omega \in \mathrm{Sec}\, A^k(\tau_M; \xi) :\Longleftrightarrow \Omega : x \in M \longmapsto \Omega_x\,,$$
$$\Omega_x : \underbrace{T_xM \times \dots \times T_xM}_{k} \longrightarrow E_x \quad \text{ferdeszimmetrikus.}$$

A továbbiakban az $A^k(M; \xi) := \mathrm{Sec}\, A^k(\tau_M; \xi)$ $(0 \le k \le n)$ jelölést használjuk, megállapodva abban, hogy $A^0(M; \xi) := \mathrm{Sec}\,\xi$. Evidens a konstrukcióból, hogy $\forall k \in \underline{n}$: $A^k(M; \xi)$ $C^\infty(M)$ - modulus; e modulusok $\bigoplus_{k=0}^{n} A^k(M;\xi)$ direkt összegének jelölésére az $A(M;\xi)$ rövidítést alkalmazzuk. Ha $A^k_M(\mathfrak{X}(M); \mathrm{Sec}\,\xi)$ az $\underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{k} \to \mathrm{Sec}\,\xi$ ferdeszimmetrikus k-lineáris leképezések $C^\infty(M)$-modulusa, akkor az

$$\Omega \in A^k(M;\xi) \longmapsto \widetilde{\Omega},\ \widetilde{\Omega}(X_1, \dots, X_k)(x) := \Omega_x[X_1(x), \dots, X_k(x)]$$

leképezés /ahol $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $i \in \underline{k}$, $x \in M$ tetsz./ természetes modulus-izomorfizmus $A^k(M;\xi)$ és $A^k_M(\mathfrak{X}(M); \mathrm{Sec}\,\xi)$ között - tehát

$$\boxed{A^k(M;\xi) \cong A^k_M(\mathfrak{X}(M); \mathrm{Sec}\,\xi) \ (k \in \underline{n})}\,.$$

A ξ-értékű k-formák így adódó interpretációjával reflexszerűen élünk a következőkben. - $A(M;\xi)$ további struktúrával is fölruházható, nevezetesen az $A(M)$ algebra fölötti /baloldali, graduált/ modulussá tehető az

$$A(M)\times A(M;\xi)\longrightarrow A(M;\xi),\ (\omega,\Omega)\longmapsto\omega\wedge\Omega,$$

$$\omega\wedge\Omega\,(X_1,\dots,X_k,X_{k+1},\dots,X_{k+\ell}):=$$

$$:=\frac{1}{k!\,\ell!}\sum_{\sigma\in S_{k+\ell}}\varepsilon(\sigma)\,\omega(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(k)})\,\Omega(X_{\sigma(k+1)},\dots,X_{\sigma(k+\ell)})$$

/ $\omega\in A^k(M)$, $\Omega\in A^\ell(M;\xi)$, $X_i\in\mathfrak{X}(M)$, $i\in\underline{k+\ell}$ / előírással bevezetett szorzás révén. Ekkor az

$$A(M)\otimes_M \mathrm{Sec}\,\xi\longrightarrow A(M;\xi),\ \omega\otimes\sigma\longmapsto\omega\wedge\sigma$$

leképezés természetes izomorfizmust szolgáltat a szóbanforgó $A(M)$-modulusok között; ilymódon

$$\boxed{A(M)\otimes_M \mathrm{Sec}\,\xi\cong A(M;\xi)}\ .$$

/8.2/ Tegyük föl a most következőkben, hogy $\xi=(E,\pi,M)$ fibrált tér. A /8.1/-ben mondottak szerint képezhető az $A(E;\tau_E)\cong A(E)\otimes_E\mathfrak{X}(E)$ $A(E)$-modulus; ezt a ξ fölötti Frölicher-Nijenhuis modulusnak /röviden: FN-modulusnak/ nevezzük. Ismeretes /ld. [FrNi] vagy [D], Prob. 17.19.2/3 /, hogy $A(E;\tau_E)$ /valós/ graduált Lie-algebrává tehető a vektormezők szokásos Lie-szorzatának egy finom általánositása segitségével. Ezt az $A(E;\tau_E)$ -beli szorzást Nijenhuis-szorzásként vagy - utalva $[\cdot,\cdot]$ -lel való jelölésére - Nijenhuis-zárójelként fogjuk emliteni. Igy jutunk az FN-algebrához. Ez a minket elsősorban érdeklő konnexióelméleti alkalmazások szempontjából azonban tulságosan bő, ugyhogy jelen §-ban megkonstruáljuk egy olyan "leszükitését", amely tökéletesen adekvát eszköz lesz céljainkhoz. Az első lépés ebbe az irányba az FN-modulus leszükitése. - A bázissokaság differenciálformáinak /valós, graduált/ algebrája természetes módon befoglalható $A(E)$-be, az $\omega\in A(M)$ formákat azonositva a $\pi^*\omega$ bázikus formákkal //5.3//. Ilymódon

$$A(M)\cong\pi^*A(M):=\{\pi^*\omega\mid\omega\in A(M)\}\subset A(E);$$

erre tekintettel M -en adott formát ill. függvényt gyakran jelölésbeli distinkció - formális fölliftelés - nélkül hattatunk E -n. Evidens, hogy $\pi^*A(M)$, mint $\pi^*C^\infty(M)$ -modulus, részmodulusa $A(E)$ -nek. Másfelől //5.4.3// $\mathcal{X}_p E$ Lie-részalgebrája az $\mathcal{X}(E)$ Lie-algebrának, $\mathcal{X}(E)$ -nek mint $\pi^* C^\infty(M)$ -modulusnak pedig részmodulusa.

<u>/8.2.1/ lemma</u> Az $A(M) \otimes \mathcal{X}_p E \cong \pi^* A(M) \otimes \mathcal{X}_p E$ tenzori szorzat $A(E; \tau_E)$ -nek mint $\pi^* A(M)$ -modulusnak részmodulusa.

:: $\pi^* A(M) \subset A(E)$ és $\mathcal{X}_p E \subset \mathcal{X}(E)$ folytán értelmes módon szólhatunk a $\pi^* A(M) \otimes \mathcal{X}_p E \subset A(E) \otimes \mathcal{X}(E)$ tenzori szorzatról, maga a kijelentés pedig a /8.1/-ben mondottak és az iménti észrevételek alapján világos. ::

$A(M) \otimes \mathcal{X}_p E$ -t a <u>leszűkitett FN-modulusnak</u> nevezzük és a fentiekkel összhangban $A_p(M; \tau_E)$ -vel is jelöljük. $\Omega = \omega \otimes X \in A_p(M; \tau_E)$ <u>vetitett formáján</u> azt az $\overline{\Omega} := \omega \otimes \overline{X} \in A(M) \otimes \mathcal{X}(M) \cong A(M; \tau_M)$ formát értjük, ahol $X \overset{\pi}{\sim} \overline{X}$; ezt az értelmezést $\pi^* C^\infty(M)$ -lineárisan kiterjesztve a nem dekomponálódó elemekre szólunk $A_p(M; \tau_E)$ tetszőleges elemének vetitettjéről s magát $A_p(M; \tau_E)$ -t a <u>vetithető vektorértékű formák</u> modulusaként is emlitjük.

<u>/8.2.2/ megjegyzés</u> Természetes módon adódik a konstrukcióból $\pi^* A^k(M) \otimes \mathcal{X}_p E$ elemeinek $\underbrace{\mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M)}_{k} \to \mathcal{X}_p E$ <u>ferdeszimmetrikus leképezésekként</u> való interpretálása: a /8.1/-ben mondottak szerint $\pi^* \omega \otimes X \in \pi^* A^k(M) \otimes \mathcal{X}_p E \xmapsto{\cong} \omega \wedge X$, ahol most $\forall X_i \in \mathcal{X}(M), i \in \underline{k}$:

$$\omega \wedge X (X_1, \dots, X_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \varepsilon(\sigma) \pi^* [\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)})] X = \pi^* [\omega(X_1, \dots, X_k)] X$$ -

tehát $\omega \otimes X = \omega \wedge X \in A^k(\pi^* \mathcal{X}(M), \mathcal{X}_p E) \cong A^k(\mathcal{X}(M), \mathcal{X}_p E)$.

/Világos egyben, hogy $\omega \otimes X$ helyett $X \otimes \omega$ is irható, e lehetőséggel élni fogunk./ Innen azonnal eljutunk a <u>metszetekként</u> való fölfogáshoz:

$$\pi^* \omega \otimes X \xmapsto{\cong} \Omega, \ \Omega : z \in E \longmapsto \Omega_z, \ \Omega_z [X_1(\pi(z)), \dots, X_k(\pi(z))] :=$$

$:= \pi^* [\omega(X_1, \dots, X_k)](z) X(z)$. - A továbbiakban ezen interpretációk alkalmazása is reflexszerűen történik.

<u>/8.2.3/ következmény</u> A szokásos koordinátázást //3.3// használva, $\Omega = \pi^* \omega \otimes X \in \pi^* A^k(M) \otimes \mathcal{X}_p E$ lokális előállitása

$$\left(\pi^* (\omega_{i_1 \dots i_k} X^i) \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) \otimes dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad \Big(\omega \restriction \mathcal{U} = \omega_{i_1 \dots i_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k},$$

$$X \restriction \pi^{-1}(\mathcal{U}) = (X^i \circ \pi) \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \Big),$$ az $\overline{\Omega}$ vetitett formái pedig

$\omega_{i_1\dots i_k} X^i \frac{\partial}{\partial u^i}\otimes du^{i_1}\wedge\dots\wedge du^{i_k}$. Tetszőleges $\Omega \in \pi^* A^k(M)\otimes \mathfrak{X}_p E$ koordinátakifejezése $\left(\Omega^i_{i_1\dots i_k}\frac{\partial}{\partial x^i} + \Lambda^\alpha_{i_1\dots i_k}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)\otimes dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$, ahol $\Omega^i_{i_1\dots i_k}\in \pi^* C^\infty(M)$, $\Lambda^\alpha_{i_1\dots i_k}\in C^\infty(E)$. ::

Abban a helyzetben vagyunk immár, hogy $A_p(M;\tau_E)$ -t alkalmas módon algebrává tehetjük.

/8.2.4/ lemma Ha $\Omega\in\pi^* A^\ell(M)\otimes\mathfrak{X}_p E$ és $\Psi\in\pi^* A^m(M)\otimes\mathfrak{X}_p E$ Nijenhuis-szorzatát az

$$[\Omega,\Psi](X_1,\dots,X_\ell,X_{\ell+1},\dots,X_{\ell+m}) :=$$

$$\frac{1}{\ell!\,m!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{\ell+m}}\varepsilon(\sigma)\Big\{\big[\Omega(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(\ell)}),\Psi(X_{\sigma(\ell+1)},\dots,X_{\sigma(\ell+m)})\big] -$$

$$-\ell\,\Omega\big(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(\ell-1)},[X_{\sigma(\ell)},\overline{\Psi}(X_{\sigma(\ell+1)},\dots,X_{\sigma(\ell+m)})]\big) -$$

$$-m\,\Psi\big([\overline{\Omega}(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(\ell)}),X_{\sigma(\ell+1)}],X_{\sigma(\ell+2)},\dots,X_{\sigma(\ell+m)}\big)+$$

$$+\frac{\ell m}{2}\,\Omega\big(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(\ell-1)},\overline{\Psi}([X_{\sigma(\ell)},X_{\sigma(\ell+1)}],X_{\sigma(\ell+2)},\dots,X_{\sigma(\ell+m)})\big)+$$

$$+\frac{\ell m}{2}\,\Psi\big(\overline{\Omega}(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(\ell-1)},[X_{\sigma(\ell)},X_{\sigma(\ell+1)}]),X_{\sigma(\ell+2)},\dots,X_{\sigma(\ell+m)}\big)\Big\}$$

/ $X_i\in\mathfrak{X}(M)$, $i\in\underline{\ell+m}$; $\overline{\Omega}$ és $\overline{\Psi}$ Ω ill. Ψ vetített formája/ előírással értelmezzük, akkor az így bevezetett szorzás $A_p(M;\tau_E)$ -t valós, graduált Lie-algebrává teszi.

:: A definícióból közvetlenül kiolvasható, hogy $[\Omega,\Psi]$ valamennyi változójában ferdeszimmetrikus, hasonló módon látható az additivitás. Ha megmutatjuk, hogy $\forall f\in C^\infty(M)$, $i\in\underline{\ell+m}$, $X_i\in\mathfrak{X}(M)$: $[\Omega,\Psi](\dots,fX_i,\dots) = \pi^* f\,[\Omega,\Psi](\dots,X_i,\dots)$, következik, hogy $[\Omega,\Psi]\in A^{\ell+m}(\pi^* A(M),\mathfrak{X}_p E)\cong A_p^{\ell+m}(M;\tau_E)$.

Ez utóbbi tulajdonság teljes általánosságban való ellenőrzése igen hosszadalmas írásmunkát igényelne, a mechanizmus működését ezért csupán az $\Omega,\Psi\in A^1_p(M;\tau_E)$ esetben illusztráljuk. Ekkor az értelmezés és a Lie-szorzás tulajdonságai alapján

$$[\Omega,\Psi](fX,Y) = [\Omega(fX),\Psi(Y)] - [\Omega(Y),\Psi(fX)] - \Omega[fX,\overline{\Psi}(Y)] + \Omega[Y,\overline{\Psi}(fX)] -$$

$$-\Psi([\overline{\Omega}(fX),Y]) + \Psi([\overline{\Omega}(Y),fX]) + \Omega(\overline{\Psi}[fX,Y]) + \Psi(\overline{\Omega}[fX,Y]) =$$

$$= \pi^* f[\Omega,\Psi](X,Y) - \big(\Psi(Y)(\pi^* f)\big)\Omega(X) - \big(\Omega(Y)(\pi^* f)\big)\Psi(X) +$$
$$+ \pi^*[\overline{\Psi}(Y)f]\Omega(X) + \pi^*(Yf)\Omega[\overline{\Psi}(X)] + \pi^*(Yf)\Psi[\overline{\Omega}(X)] + \pi^*\big(\overline{\Omega}(Y)(f)\big)\Psi(X) -$$
$$- \pi^*(Yf)\Omega(\overline{\Psi}(X)) - \pi^*(Yf)\Psi[\overline{\Omega}(X)] = \pi^* f[\Omega,\Psi](X,Y) - \big(\Psi(Y)(\pi^* f)\big)\Omega(X) +$$
$$+ \pi^*[\overline{\Psi}(Y)f]\Omega(X) - \big(\Omega(Y)(\pi^* f)\big)\Psi(X) + \pi^*\big(\overline{\Omega}(Y)f\big)\Psi(X),$$

ahol a 2. és 3. valamint a 4. és 5. tag szintén kiejti egymást, ui. pl. – /8.2.3/ figyelembevételével – $\Psi(Y) = (Y^i \circ \pi) \cdot \left((\Psi_i^j \circ \pi)\frac{\partial}{\partial x^j} + \Lambda_i^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)$ ill. $\overline{\Psi}(Y) = Y^i \Psi_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, amiből világos, hogy $\Psi(Y)\pi^* f = \pi^*[\overline{\Psi}(Y)f]$. – A graduált Lie-algebrára előírt axiómák /1.2//1°,2°/ ellenőrzése elvben hasonlóan egyszerű, de a kivitelezés nagyon helyigényes. ::

/8.3/ Az $A_p(M;\tau_E)$ leszűkitett FN-algebra fontos részalgebrájához jutunk, ha τ_E helyett formálisan $V\xi \equiv V\tau_E$ -t irunk. Kevésbé formálisan: $\pi^* A(M) \otimes \mathcal{X}_V E$ részalgebrája $\pi^* A(M) \otimes \mathcal{X}_p E \equiv A_p(M;\tau_E)$ -nek; ezt a részalgebrát $A(M;V\xi)$ -vel is jelöljük és a ξ fölötti <u>vertikális FN-algebrának</u> hivjuk. $A(M;V\xi)$ elemeit <u>vertikális vektori formák</u>ként emlitjük, s ezzel összhangban "vertikális FN-algebra" helyett a <u>vertikális vektori formák algebrájáról</u> is szólunk. $A(M;V\xi)$ egy $\pi^*\omega \otimes X$ dekomponálódó elemének vetitett formája $X \sim 0$ miatt $\pi^*\omega \otimes \overline{X} = 0$, következőleg $\forall \Omega \in A(M;V\xi)$: $\overline{\Omega} = 0$. Ebből adódóan $A(M;V\xi)$ -ben a Nijenhuis-szorzat lényegesen egyszerűbb alakot ölt:

<u>/8.3.1/ következmény</u> Ha $\Omega \in A^\ell(M;V\xi)$, $\Psi \in A^m(M;V\xi)$, ugy

$$\forall X_i \in \mathcal{X}(M) \quad (i \in \underline{\ell+m}):$$

$$[\Omega,\Psi](X_1,\dots,X_\ell,\dots,X_{\ell+m}) =$$
$$= \frac{1}{\ell!\,m!}\sum_{\sigma \in \mathcal{T}_{\ell+m}} \left[\Omega(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(\ell)}),\Psi(X_{\sigma(\ell+1)},\dots,X_{\sigma(\ell+m)})\right]. \quad ::$$

– Triviális, de mégsem érdektelen észrevétel $A(M;V\xi)$ algebrai szerkezetét illetően a

<u>/8.3.2/ lemma</u> $A(M;V\xi)$ <u>bimodulus</u> a $\pi^* C^\infty(M)$ és $C^\infty(E)$ gyűrük fölött az

$$(f \circ \pi)(\pi^*\omega \otimes X) := \pi^*(f\omega) \otimes X \quad ill. \quad (\pi^*\omega \otimes X)g = \pi^*\omega \otimes gX$$

$(f \in C^\infty(M),\ g \in C^\infty(E))$ előirás által meghatározott bal- ill. jobbszorzással.

:: Világos, hogy $A(M; V\xi)$ baloldali modulus $\pi^* C^\infty(M)$, jobboldali modulus $C^\infty(E)$ fölött s az /1.1/-beli bimodulus-feltétel teljesülése is azonnal látható. ::

/8.3.3/ megjegyzés /8.2.3/-ból kiolvasható, hogy egy $\Omega \in A^\ell(M; V\xi)$ vertikális vektori forma koordinátaelőállitása

$\Omega^\alpha_{i_1 \dots i_\ell} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \otimes dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\ell}$ alaku, ahol $\Omega^\alpha_{i_1 \dots i_\ell} \in C^\infty(E)$.

/8.3.4/ példa Legyen $M \in \mathcal{M}$ s fibrált tér gyanánt tekintsük speciálisan a $\tau_M = (TM, \pi_M, M)$ érintőnyalábot. A /4.4.3/-beli konstrukció ebben a szituációban egy $\ell^V : X \in \mathfrak{X}(M) \longmapsto \ell^V(X) := k^\# X = X^V \in \mathfrak{X}_V TM$ leképezéshez vezet /ahol most k a $VTM \longrightarrow TM$ kanonikus leképezést jelenti/. A vertikális liftelés tulajdonságaiból //4.4.3///1// tüstént adódik, hogy ekkor $\ell^V \in \pi^* A^1(M) \otimes \mathfrak{X}_V TM \cong A^1(M; V\tau_M)$. A /3.3/-ban emlitett $(x^i), (y^i), i \in \underline{n}$ koordinátarendszert használva, $X^V \restriction \pi_M^{-1}(\mathcal{U}) = (X^i \circ \pi) \frac{\partial}{\partial y^i}$; igy ha $\ell^V \restriction \pi_M^{-1}(\mathcal{U}) = \ell^i_j \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dx^j$ //8.2.3//, akkor $(X^i \circ \pi) \frac{\partial}{\partial y^i} = \ell^i_j \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dx^j \left((X^k \circ \pi) \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \ell^i_j (X^k \circ \pi) \delta^j_k \frac{\partial}{\partial y^i} = \ell^i_j (X^j \circ \pi) \frac{\partial}{\partial y^i}$, amiből $\ell^i_j = \delta^i_j$ következik, tehát $\ell^V \restriction \pi_M^{-1}(\mathcal{U}) = \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dx^i$. – /8.3.1/ értelmében $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$: $[\ell^V, \ell^V](X, Y) = [\ell^V(X), \ell^V(Y)] - [\ell^V(Y), \ell^V(X)]$, s itt /4.4.3///2/ miatt a jobboldal zérus. Érvényes tehát a

/8.3.5/ következmény Ha $\ell^V \in A^1(M; V\tau_M)$ a vertikális liftelés, akkor az $[\ell^V, \ell^V]$ Nijenhuis-szorzat eltűnik. ::

/8.3.6/ megjegyzés A /7.1/-ben definiált ϑ struktura 1-forma bizonyos mértékig beilleszthető a most vázolt fogalmi keretbe: JE fölötti, $V\xi$-értékű 1-formaként interpretálható, amennyiben hatását a

$$j_x\sigma \in JE \longmapsto \vartheta_{j_x\sigma} \in \mathrm{Hom}\left(T_{j_x\sigma} JE, V_{\sigma(x)} E\right),\ \vartheta_{j_x\sigma}(u) := D^V\sigma(x)[Tp(u)]$$

előirással adjuk meg.

<u>9.§. Differenciáloperátorok</u>

/9.0/ A jelenkori kutatások egy igen messze- és szerteágazó gyökerekkel rendelkező s az áttekinthetetlenségig kiterebélyesedett fejezetéből meritünk most néhány fontos gondolatot. Ezeket - miként hasonló szituációban eddig is - igyekszünk ugy interpretálni /esetenként átdolgozni/, hogy megfogalmazásuk a céljaink szempontjából a legalkalmasabb alakot öltse. Főbb forrásaink e §-hoz [Her], [Pal] ill. [K-S1] - [K-S4] és [Kr]. A 16.§-ban látni fogjuk, hogy a differenciáloperátorok eme modern szemléletmódja termékenyitőleg hat a konnexióelméletre is.

/9.1/ Tekintsük a közös bázisterü $\xi = (E, \pi, M)$ és $\xi' = (E', \pi', M)$ vektornyalábot. - Egy <u>$C^\infty(M)$-lineáris</u> $Sec\,\xi \longrightarrow Sec\,\xi'$ leképezést <u>nulladrendü lineáris differenciáloperátor</u>nak is nevezünk, mig egy $\mathfrak{D} : Sec\,\xi \longrightarrow Sec\,\xi'$ <u>$\mathbb{R}$-lineáris</u> leképezést <u>elsőrendü lineáris differenciáloperátor</u>nak mondunk, ha $\forall x \in M$, $\sigma \in Sec\,\xi$: $j_x\sigma = 0 \Longrightarrow (\mathfrak{D}\sigma)(x) \equiv \mathfrak{D}\sigma(x) = 0$.

<u>/9.1.1/ példa</u> A $j : \sigma \in Sec\,\xi \longmapsto j\sigma \in Sec\,J\xi$ leképezés /az 1-jet kiterjesztés, /7.2// elsőrendü lineáris differenciáloperátor. /6.5.3/-ból erre tüstént kapjuk a $j(f\sigma) = i(df \otimes \sigma) + f j\sigma$ $(f \in C^\infty(M))$ derivációs tulajdonságot.

<u>/9.1.2/ példa</u> Értelmezzük a $\mathfrak{D}_S : s \in Sec\,J\xi \longmapsto \mathfrak{D}_S(s)$ leképezést a $\mathfrak{D}_S(s) := j(p \circ s) - s$ előirással! /6.3.5/-ből közvetlenül adódik ekkor, hogy $\mathfrak{D}_S(s)$ természetes módon interpretálható $\tau^*_M \otimes \xi$ metszeteként. Mivel $\mathfrak{D}_S$ nyilvánvalóan $\mathbb{R}$-lineáris, továbbá $j_x s = 0$ esetén $s(x) = 0$ és $j_x(p \circ s) = 0$ is automatikusan fönnáll, következik, hogy $\mathfrak{D}_S$ egy $Sec\,J\xi \longrightarrow Sec(\tau^*_M \otimes \xi)$ elsőrendü lineáris differenciáloperátor. Ezt - föltalálójáról - <u>Spencer-operátor</u>nak nevezzük. $\mathfrak{D}_S$ birtokában megkonstruálható az a $\check{\mathfrak{D}}_S : Sec(\Lambda^k \tau^*_M \otimes J\xi) \longrightarrow Sec(\Lambda^{k+1} \tau^*_M \otimes \xi)$ leképezés, amelyet a $\check{\mathfrak{D}}_S(\omega \otimes s) := \omega \wedge \mathfrak{D}_S s + d\omega \otimes (p \circ s)$ $(\omega \in \Lambda^k \tau^*_M,\ s \in Sec\,J\xi)$ összefüggés - a dekomponálódó metszeteken való hatása - határoz meg; $\check{\mathfrak{D}}_S$-et a <u>kiterjesztett Spencer-operátor</u>nak hivjuk. Világos, hogy e kiterjesztés

ugyancsak elsőrendű, lineáris differenciálopert eredményezett. - Speciálisan megállapodunk abban, hogy $\sigma \in Sec\,\xi$ esetén $\check{\mathfrak{D}}_S(\omega \otimes \sigma) := d\omega \otimes \sigma$.

<u>/9.1.3/ lemma</u> A Spencer-operátorra ill. a kiterjesztett Spencer-operátorra teljesülnek a következők:

/i/ $\forall f \in C^\infty(M),\ s \in Sec\,J\xi:\ \mathfrak{D}_S(fs) = f\,\mathfrak{D}_S s + i(df \otimes p \circ s)$.

/ii/ $s \in Sec\,J\xi$ pontosan akkor holonom, ha $\mathfrak{D}_S s = 0$.

/iii/ $\check{\mathfrak{D}}_S \circ \check{\mathfrak{D}}_S = 0$.

:: A /9.1.1/-ben tett észrevétel figyelembevételével $\mathfrak{D}_S(fs) := j(f(p \circ s)) - fs = i(df \otimes p \circ s) + fj(p \circ s) - fs = f\,\mathfrak{D}_S s + i(df \otimes p \circ s)$, /i/ tehát fennáll. Amennyiben $s \in Sec\,J\xi$ holonom //7.2//, mondjuk $s = j\sigma$ $(\sigma \in Sec\,\xi)$, ugy $\mathfrak{D}_S s = j(p \circ j\sigma) - j\sigma = 0$, hiszen $p \circ j\sigma = \sigma$. Megforditva, a definicióból evidens, hogy $\mathfrak{D}_S s = 0$ s holonomitását jelenti. /iii/ igazolására áttérve, vegyük észre: elég annyit belátni, hogy $\mathfrak{D}_S[\mathfrak{D}_S(\omega \otimes j\sigma)] = 0$, ahol $\omega \in \Lambda^k \tau^*_M$, σ /lokális/ metszete ξ -nek. Ez azonban fennáll, mivel /ii/ s az iménti megállapodás figyelembevételével

$$\mathfrak{D}_S[\mathfrak{D}_S(\omega \otimes j\sigma)] = \mathfrak{D}_S(d\omega \otimes \sigma) = d^2\omega \otimes \sigma = 0.$$

::

<u>/9.1.4/ megjegyzés</u> ${}^0\mathcal{L}\mathfrak{D}\mathcal{O}(\xi,\xi')$-vel, ill. ${}^1\mathcal{L}\mathfrak{D}\mathcal{O}(\xi,\xi')$ -vel fogjuk jelölni a $Sec\,\xi \longrightarrow Sec\,\xi'$ nullad- ill. elsőrendű lineáris differenciáloperátorok halmazát. Magasabbrendű differenciáloperátorok - magasabbrendű jetek segitségével - hasonlóan definiálhatók; az összes $Sec\,\xi \longrightarrow Sec\,\xi'$ lineáris differenciáloperátorok halmazának jelölésére $\mathcal{L}\mathfrak{D}\mathcal{O}(\xi,\xi')$ szolgál. $\mathcal{L}\mathfrak{D}\mathcal{O}(\xi,\xi')$ természetes módon vektortér-strukturával ruházható föl; ennek a vektortérnek ${}^0\mathcal{L}\mathfrak{D}\mathcal{O}(\xi,\xi')$ és ${}^1\mathcal{L}\mathfrak{D}\mathcal{O}(\xi,\xi')$ altere.

Ismert /ld. [D], 17.13.3 ill. [H], I.p.49/ s eléggé egyszerüen ellenőrizhető tényekre emlékeztet a

<u>/9.1.5/ lemma</u> $\mathfrak{D} \in {}^0\mathcal{L}\mathfrak{D}\mathcal{O}(\xi,\xi') \Longleftrightarrow \exists A \in Mor_M(\xi,\xi'):$

$\forall x \in M,\ \sigma \in Sec\,\xi:\ \mathfrak{D}\sigma(x) = A(x)\sigma(x)$. - Amennyiben $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ lokális bázisa $Sec\,\xi$ -nek //3.3.1// és $\mathfrak{D} \in {}^1\mathcal{L}\mathfrak{D}\mathcal{O}(\xi,\xi')$, ugy - lokálisan - tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ és $\sigma \in Sec\,\xi$ esetén $\mathfrak{D}(fe_\alpha) = \Delta^\beta_\alpha(f)\bar{e}_\beta$, ahol $(\bar{e}_\beta)_{\beta \in I'}$ lokális bázisa $Sec\,\xi'$ -nek, $\Delta^\beta_\alpha: C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ $((\alpha,\beta) \in I \times I')$ pedig derivació. ::

/9.2/ Bevezetjük a lineáris differenciáloperátorok szimbólumának fogalmát. Előkészítésként egy egyszerű észrevételt teszünk.

/9.2.1/ lemma Legyen $\mathcal{D}\in {}^1\mathcal{LDO}(\xi,\xi')$. Ha $f\in C^\infty(M)$ rögzitett és $\mathcal{D}_f : Sec\,\xi \longrightarrow Sec\,\xi'$, $\sigma\longmapsto \mathcal{D}_f\sigma := \mathcal{D}(f\sigma)-f\mathcal{D}\sigma$, akkor $\mathcal{D}_f\in {}^0\mathcal{LDO}(\xi,\xi')$, míg rögzitett $\sigma\in Sec\,\xi$ metszet mellett a $\mathcal{D}_\sigma : f\in C^\infty(M)\longmapsto \mathcal{D}_\sigma f := \mathcal{D}(f\sigma)-f\mathcal{D}\sigma$ leképezés elsőrendű lineáris differenciáloperátor /$C^\infty(M)$ -et az $(M\times\mathbb{R}, pr_1, M)$ triviális nyaláb metszeteinek modulusaként interpretálva/.

:: Alapulvéve $Sec\,\xi$ (e_α) lokális bázisát //3.3.1//, $\mathcal{D}_f$ -fel kapcsolatban elég azt megmutatnunk, hogy $\forall g\in C^\infty(M)$, $\alpha\in\underline{r}$: $\mathcal{D}_f(ge_\alpha)=g\mathcal{D}_f(e_\alpha)$. - /9.1.3/ alkalmazásával $\mathcal{D}_f(ge_\alpha):=\mathcal{D}[(fg)e_\alpha]- -f\mathcal{D}(ge_\alpha) = [\Delta_\alpha^\beta(fg)]\bar{e}_\beta - f(\Delta_\alpha^\beta g)\bar{e}_\beta = g(\Delta_\alpha^\beta f)\bar{e}_\beta = g\mathcal{D}(fe_\alpha) = = g[\mathcal{D}(fe_\alpha)-f\mathcal{D}e_\alpha] = g\mathcal{D}_f e_\alpha$, hiszen $\mathcal{D}e_\alpha=0$, mert $\forall x\in\mathcal{U}\subset M: j_x e_\alpha = 0$. - A $\mathcal{D}_\sigma$ leképezés nyilvánvalóan $\mathbb{R}$-lineáris. Ha $j_x f=0$, akkor $f(x)=0$ és $\forall i\in\underline{n}: \frac{\partial f}{\partial u^i}(x)=0 \Longrightarrow df(x)=0$; igy egyben /9.1.1/ $j_x f\sigma = i(df(x)\otimes\sigma(x))+f(x)j_x\sigma = 0$, tehát $j_x f=0 \Longrightarrow \mathcal{D}_\sigma f(x)=0$. ::

$\mathcal{D}\in {}^1\mathcal{LDO}(\xi,\xi')$ $x\in M$ -beli szimbólumán mármost azt a $\mathcal{D}_x^s : T_x^*M\times E_x \longrightarrow E'_x$ $\mathbb{R}$ -bilineáris leképezést értjük, amelyre tetszőleges $\sigma\in Sec\,\xi$ metszet és az x pontban eltűnő $f\in C^\infty(M)$ függvény esetén $\mathcal{D}_x^s(df(x),\sigma(x)) := \mathcal{D}(f\sigma)(x)$. Be kell látnunk, hogy az értelmezés korrekt. Ehhez elég megmutatni: $(df(x)=0 \vee \sigma(x)=0) \Longrightarrow \mathcal{D}(f\sigma)(x)=0$. - Mivel //9.2.1// $\mathcal{D}(f\sigma)(x) = \mathcal{D}_f\sigma(x)+f(x)\mathcal{D}\sigma(x)$, ahol $\mathcal{D}_f\in {}^0\mathcal{LDO}(\xi,\xi')$, $\sigma(x)=0$ esetén $\mathcal{D}(f\sigma)(x)$ eltűnése azonnal adódik. Amennyiben $df(x)=0$; $f(x)=0$ mellett $\frac{\partial f}{\partial u^i}(x)=0$ $(i\in\underline{n})$ is fennáll, s ez $\mathcal{D}_\sigma$ elsőrendű volta //9.2.1// miatt implikálja $\mathcal{D}(f\sigma)(x)=0$ teljesülését. - Az elmondottaknak egyszerű átfogalmazása a

/9.2.2/ következmény Jelölje $\mathcal{B}(\tau_M^*\times\xi,\xi')$ azt az M bázisterű vektornyalábot, amelynek egy $x\in M$ pont fölötti fibruma a $T_x^*M\times E_x \longrightarrow E_x$ bilineáris leképezések vektortere. Ekkor $\forall\,\mathcal{D}\in {}^1\mathcal{LDO}(\xi,\xi')$: $\exists\,\mathcal{D}^s\in Sec\,\mathcal{B}(\tau_M^*\times\xi,\xi')$: $\forall\sigma\in Sec\,\xi$, $f\in C^\infty(M)$, $x\in M$: $\mathcal{D}^s(x)(df(x),\sigma(x)) = \mathcal{D}[(f-f(x))\sigma](x)$. ::

A definició kiterjesztése nulladrendü differenciáloperátorokra meglehetősen kézenfekvő: $\mathcal{D} \in {}^0\mathcal{L}\mathcal{D}\mathcal{O}(\xi,\xi')_{x\in M}$ -beli szimbólumán a $z \in E_x \longmapsto \mathcal{D}^s_x(z) := \mathcal{D}\sigma(x) \in E'_x$ $(\sigma \in Sec\,\xi,\ \sigma(x) = z)$ leképezést értjük. A "korrektség" ellenőrzése most triviális: $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ esetén $\mathcal{D}\sigma_1(x) = \mathcal{D}\sigma_2(x)$.

/9.2.3/ lemma $\mathcal{D} \in {}^1\mathcal{L}\mathcal{D}\mathcal{O}$ pontosan akkor nulladrendü, ha tetszőleges $x \in M$ pont és rögzitett $\theta \in T^*_x M$ kovektor esetén a $\mathcal{D}^s_\theta : E_x \longrightarrow E'_x$, $z \longmapsto \mathcal{D}^s_\theta(z) := \mathcal{D}^s_x(\theta, z)$ leképezés zérus-leképezés.

:: Amennyiben $\mathcal{D} \in {}^0\mathcal{L}\mathcal{D}\mathcal{O}(\xi,\xi') \cap {}^1\mathcal{L}\mathcal{D}\mathcal{O}(\xi,\xi')$, ugy /9.1.5/ értelmében $\mathcal{D}^s_\theta(z) = \mathcal{D}^s_x(df(x), \sigma(x)) = A(x)f(x)\sigma(x) = 0$,

hiszen $f(x) = 0$ / $\theta := df(x)$, $z := \sigma(x)$, $\sigma \in Sec\,\xi$. /. Megforditva, ha tetszőlegesen rögzitett $f \in C^\infty(M)$ mellett $\forall \sigma \in Sec\,\xi$: $\mathcal{D}^s_{df(x)}(\sigma(x)) = 0$, ugy /9.2.2/ figyelembevételével $0 = \mathcal{D}[(f - f(x))\sigma](x) =$ $= [\mathcal{D}(f\sigma - f(x)\sigma)](x) = [\mathcal{D}(f\sigma)](x) - f(x)\,\mathcal{D}\sigma(x)$ irható, ahonnan $\mathcal{D}f\sigma = f\mathcal{D}\sigma$, azaz $\mathcal{D} \in {}^0\mathcal{L}\mathcal{D}\mathcal{O}(\xi,\xi')$ következik. ::

/9.3/ Azt mondjuk, hogy $\mathcal{D} \in {}^1\mathcal{L}\mathcal{D}\mathcal{O}(\xi,\xi)$ <u>kvázi-skalár differenciáloperátor</u>, ha tetszőleges $x \in M$ és rögzitett $\theta \in T^*_x M$ esetén a $\mathcal{D}^s_\theta : E_x \longrightarrow E_x$ lineáris leképezés //9.2.3// skalárral való szorzást jelent / [Pal], 19.33 Def./. - Megemlitjük a következő eredményt / [K-S 2] /:

/9.3.1/ lemma $\mathcal{D} \in \mathcal{L}\mathcal{D}\mathcal{O}(\xi,\xi)$ pontosan akkor kvázi-skalár, ha megadható a $C^\infty(M)$ algebrának egy D_M derivációja ugy, hogy tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ és $\sigma \in Sec\,\xi$ esetén $\mathcal{D}(f\sigma) = f\mathcal{D}\sigma + (D_M f)\sigma$. ::

/9.4/ Olyan észrevétellel folytatjuk, amely a lineáris differenciáloperátorok nagyfontosságu általánositásához ad kulcsot kezünkbe.

/9.4.1/ lemma $\forall \mathcal{D} \in {}^1\mathcal{L}\mathcal{D}\mathcal{O}(\xi,\xi') : \exists!\, \overline{\mathcal{D}} \in Mor_M(J\xi, \xi') : \mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}}_* \circ j$.

A $\mathcal{D} \longmapsto \overline{\mathcal{D}}$ leképezés ekkor lineáris izomorfizmus az $\mathcal{L}\mathcal{D}\mathcal{O}(\xi,\xi')$ és a $Mor_M(J\xi,\xi')$ vektortér között.

:: Ha $\mathcal{D} \in \mathcal{L}\mathcal{D}\mathcal{O}(\xi,\xi')$ és a $\overline{\mathcal{D}}$ leképezést a $\overline{\mathcal{D}} \upharpoonright (JE)_x$: $j_x\sigma \in (JE)_x \longmapsto \mathcal{D}\sigma(x)$ előirással értelmezzük, akkor a $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}}_* \circ j$ kivánalom automatikusan teljesül, hiszen $\forall \sigma \in Sec\,\xi$, $x \in M$:

$[\bar{\mathcal{D}}_x \circ j(\sigma)](x) = [\bar{\mathcal{D}}_x(j\sigma)](x) := \bar{\mathcal{D}}[(j\sigma)(x)] = \bar{\mathcal{D}}(j_x\sigma) := \mathcal{D}\sigma(x)$

/v.ö. /2.5.//. Megforditva, $\bar{\mathcal{D}} \in \mathrm{Mor}_M(J\xi, \xi')$ esetén nyilvánvaló //9.1.1/1/, hogy $\mathcal{D} := \bar{\mathcal{D}}_* \circ j \in {}^1\mathcal{L}\mathcal{D}\mathcal{O}(\xi, \xi')$. A $\mathcal{D} \longmapsto \bar{\mathcal{D}}$ leképezés lineáris és bijektiv volta szintén könnyen ellenőrizhető. ::

<u>/9.4.2/ megjegyzés</u> Analóg eredmény fogalmazható meg a nulladrendű lineáris differenciáloperátorokra: $\forall\, \mathcal{D} \in {}^0\mathcal{L}\mathcal{D}\mathcal{O}(\xi, \xi') : \exists!\, \bar{\mathcal{D}} \in \mathrm{Mor}_M(\xi, \xi') : \mathcal{D}\sigma = \bar{\mathcal{D}} \circ \sigma = \bar{\mathcal{D}}_* \sigma$.

Nem meghökkentő most már a következő értelmezés. - Tegyük föl, hogy $\xi = (E, \pi, M)$ és $\xi' = (E', \pi', M)$ <u>fibrált tér</u>. Egy $\mathcal{D} : \mathrm{Sec}\,\xi \to \mathrm{Sec}\,\xi'$ leképezést <u>elsőrendű differenciáloperátornak</u> - a továbbiakban egyszerűen <u>differenciáloperátornak</u> - mondjuk, ha $\mathcal{D} = \bar{\mathcal{D}}_* \circ j$ alakban faktorizálható, ahol $\bar{\mathcal{D}} \in \mathrm{Mor}_M(J\xi, \xi')$. Amennyiben - ráadásul - E' egy (E', q, E) fibrált térnek is totáltere és $\forall \sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi$: $q \circ \mathcal{D}\sigma = \sigma$, ugy - KOLÁR [Kř] terminológiáját követve - <u>prolongált differenciáloperátorról</u> szólunk. Egy prolongált differenciáloperátort a $\xi' := V_M\xi := (VE, \pi_V \circ \pi, M)$ speciális esetben <u>vertikálisan prolongáltnak</u> nevezünk. A $\mathrm{Sec}\,\xi \to \mathrm{Sec}\,\xi'$ differenciáloperátorok halmazának jelölésére a $\mathcal{D}\mathcal{O}(\xi, \xi')$ röviditést használjuk. - Rögtön egy fontos példa:

<u>/9.4.3/ lemma</u> Ha $\xi = (E, \pi, M) \in FS$ és $X \in \mathcal{X}_p E$, akkor az

$$\mathcal{L}_X : \sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi \longmapsto \mathcal{L}_X\sigma := X \circ \sigma - T\sigma \circ \bar{X} \quad (\bar{X} \sim X)$$

leképezés - amelyet a továbbiakban /szintén/ <u>Lie-deriválás</u>ként emlitünk - vertikálisan prolongált differenciáloperátor.

:: Közvetlenül látható, hogy $j_x\sigma = j_x\tau \Longrightarrow \mathcal{L}_X\sigma(x) = \mathcal{L}_X\tau(x)$, igy az $\bar{\mathcal{L}}_X : j_x\sigma \longmapsto \bar{\mathcal{L}}_X(j_x\sigma) := \mathcal{L}_X\sigma(x)$ leképezés korrekt módon definiált s vele az $\bar{\mathcal{L}}_X \circ j = \mathcal{L}_X$ faktorizációs tulajdonság automatikusan teljesül. $T\pi \circ \mathcal{L}_X\sigma = T\pi \circ X \circ \sigma - T\pi \circ T\sigma \circ \bar{X} = \bar{X} \circ \pi \circ \sigma - T(\pi \circ \sigma) \circ \bar{X} = \bar{X} - \bar{X} = 0$ folytán $\mathcal{L}_X$ valóban $\mathrm{Sec}\, V_M\xi$ -be képez, végül $\pi_V \circ \mathcal{L}_X\sigma = \sigma$ fennállása szintén nehézség nélkül ellenőrizhető. ::

$\mathcal{L}_X$ konstrukciója kissé mesterkéltnek tűnhet, bemutatunk ezért egy kevésbé formális eljárást is. Ehhez hasznos lesz az előkészitő jellegű

<u>/9.4.4/ megjegyzés</u> Alapulvéve a $\xi=(E,\pi,M)$ fibrált teret, legyen $\sigma\in Sec\,\xi$, $X\in\mathcal{X}(M)$ s tegyük föl, hogy X a $\varphi:\mathbb{R}\times M\to M$, $(t,x)\longmapsto\varphi(t,x)=\varphi_t(x)=\varphi_x(t)$ folyam sebességvektormezője. Ekkor a $\sigma\circ\varphi:\mathbb{R}\times M\longrightarrow E$ leképezés infinitezimális variációja $T\sigma\circ X$. – Csakugyan, a /3.4.1/ bizonyitásában látottal analóg lokális számolással a rögzitett fibrált térkép tetszőleges x pontjában

$$\partial(\varphi\circ\sigma)(x)=[x^i\circ(\sigma\circ\varphi_x)]'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\sigma[\varphi_0(x)]}+[y^\alpha\circ(\sigma\circ\varphi_x)]'(0)\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\sigma[\varphi_0(x)]}=$$

$$=(u^i\circ\varphi_x)'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\sigma(x)}+(\sigma^\alpha\circ\varphi_x)'(0)\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\sigma(x)}=X^i(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\sigma(x)}+\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial u^i}(x)X^i(x)\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\sigma(x)}$$

adódik, amit /3.4.2/-vel összevetve, az állitott $\partial(\sigma\circ\varphi)=T\sigma\circ X$ relációhoz jutunk.

<u>/9.4.5/ következmény</u> Legyen $\xi=(E,\pi,M)\in FS$, $X\in\mathcal{X}_\varphi E$, $X\overset{\pi}{\sim}\overline{X}$. Amennyiben X ill. $\overline{X}$ a $\varphi:\mathbb{R}\times E\longrightarrow E$ ill. $\varphi^M:\mathbb{R}\times M\longrightarrow M$ folyam sebességvektormezője, ugy $\forall\sigma\in Sec\,\xi$:
$\mathcal{L}_X\sigma=\partial\varphi\circ\sigma-\partial(\varphi^M\circ\sigma)$. ::

<u>/9.4.6/ következmény</u> A szokásos fibrált térképet használva,
$X=(X^i\circ\pi)\frac{\partial}{\partial x^i}+Y^\alpha\frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ $(X^i\in C^\infty(M),\ i\in\underline{n})$
$\sigma^\alpha=y^\alpha\circ\sigma$ $(\alpha\in\underline{r})$ esetén $\mathcal{L}_X\sigma=\left(Y^\alpha\circ\sigma-\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial u^i}X^i\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\circ\sigma\right)$;
ha speciálisan $\xi\in VB(M)$, a Liouville-vektormező szerinti Lie-derivált formulája az $\mathcal{L}_Z\sigma=(y^\alpha\circ\sigma)\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\circ\sigma\right)=Z\circ\sigma$ alakra redukálódik.

<u>/9.4.7/ megjegyzések</u> /i/ /9.4.2/ szellemében a most tárgyalt általánosságban is szólhatunk <u>nulladrendü differenciáloperátorokról</u>: ezek a $\sigma\in Sec\,\xi\longmapsto A\circ\sigma\in Sec\,\xi'$ alaku leképezések, ahol $A\in Mor_M(\xi,\xi')$.

/ii/ Amennyiben $\xi\in VB(M)$ és $\mathcal{D}\in\mathcal{DO}(\xi,V_M\xi)$ vertikálisan prolongált, ugy VE és E k általi "azonosithatósága" folytán //4.2// $\mathcal{D}$ kanonikusan azonositható a $\overline{\mathcal{D}}:\sigma\in Sec\,\xi\longmapsto$
$\longmapsto\overline{\mathcal{D}}\sigma:=k\circ\mathcal{D}\sigma\in Sec\,\xi$ differenciáloperátorral; ezzel a lehetőséggel gyakran élünk.

/iii/ A geometriai objektumokról irott nagyjelentőségü dolgozatában /ld. [Sal] / Sarah SALVIOLI – sok egyéb mellett – a szokásos Lie-deriválás egy messzemenő általánositását is elvégezta. A mi konstrukcióink - mutatis mutandis - lényegében ennek a realizációját jelentik, speciális körülmények között; v.ö. még [Pal], [K-S 2].

/9.5/ Bevezetjük a kvázi-skalár differenciáloperátor fogalmát a /9.4/-ben körvonalazott tágabb keretek között, elejtve a linearitás feltételét, de - az egyszerüség kedvéért - a $\xi \in VB(M)$ esetre és vertikálisan prolongált differenciáloperátorokra korlátozódva. A dolog lelke egy fontos konstrukciós eljárásban, a differenciáloperátorok un. linearizálásában rejlik; v.ö. [Pal], [K-S 2]. - Alapulvéve tehát a $\xi = (E, \pi, M)$ vektornyalábot, legyen $\mathcal{D} \in \mathcal{DO}(\xi; V_M \xi)$ vertikálisan prolongált. Rögzitsünk egy $\sigma \in Sec\,\xi$ metszetet és egy $Y \in \mathcal{X}_V E$ vektormezőt s tegyük föl, hogy $s : \mathbb{R} \times M \longrightarrow E$, $(t, x) \longmapsto s(t, x) = s_t(x) = s_x(t)$ olyan leképezés, amelyre $s_0 = \sigma$ és $\partial s = Y \circ \sigma$ teljesül. /Ez a feltétel kiróható, ui. könnyen látható, hogy s existenciája lokálisan garantált - s a diszkussziónk tárgyát képező kérdés alapvetően lokális természetü./ Tekintsük ezen adatok birtokában a $\mathcal{D}_s : \mathbb{R} \times M \longrightarrow VE$, $(t, x) \longmapsto (\mathcal{D} s_t)(x)$ leképezést s jelölje - /9.4.7/ /ii/-nek megfelelően - $\overline{\mathcal{D}_s}$ a $k \circ \mathcal{D}_s$ kompoziciót. Ekkor $\overline{\mathcal{D}_s} : \mathbb{R} \times M \to E$, igy képezhető a $\partial \overline{\mathcal{D}_s} : M \to VE$ infinitézimális variáció ill. a $k \circ \partial \overline{\mathcal{D}_s} \in Sec\,\xi$ metszet. Könnyen ellenőrizhető, hogy rögzitett $\sigma \in Sec\,\xi$ mellett az $Y \in \mathcal{X}_V E \longmapsto k \circ \partial \overline{\mathcal{D}_s}$ leképezés elsőrendü lineáris differenciáloperátor; ezt a $\mathcal{D}$ differenciáloperátor linearizáltjának hivjuk. Akkor mondjuk mármost, hogy $\mathcal{D}$ kvázi-skalár differenciáloperátor, ha linearizáltja rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Erre vonatkozóan egyszerü, de hatásos kritériummal szolgál Yvette Koshmann-Schwarzbach következő eredménye /[K-S 2]/:

/9.5.1/ lemma Legyen $\xi \in VB(M)$, s tegyük föl, hogy $\mathcal{D} \in \mathcal{DO}(\xi, V_M \xi)$ vertikálisan prolongált.

- $\mathcal{D}$ pontosan akkor kvázi-skalár, ha megadható egy $X \in \mathcal{X}(M)$ vektormező olymódon, hogy a $\sigma \in Sec\,\xi \longmapsto \mathcal{D}\sigma + T\sigma \cdot X \in Sec\,(TE, \pi \circ \pi_E, M)$ leképezés nulladrendü differenciáloperátor. Ebben az esetben az X vektormező egyértelműen meghatározott - s azt is mondjuk, hogy X a $\mathcal{D}$ differenciáloperátor projekciója M-en. ::

<u>/9.5.2/ következmény</u> Ha $\xi \in VB_1$ a /9.4.3/-ban bevezetett Lie-deriválás kvázi-skalár differenciáloperátor.

:: Valóban, az $X \in \mathcal{H}_p E$ -hez tartozó $\overline{X} \in \mathcal{H}(M)$ vetitett vektormező $\mathcal{L}_X$ projekciójaként szolgál a /9.5.1/ szerinti értelemben. ::

II. HORIZONTÁLIS STRUKTURÁK ÁLTALÁNOS VIZSGÁLATA

10.§. Horizontális résznyaláb

/10.1/ Egy fogalmilag és geometriailag egyaránt igen egyszerü szituációból indulunk ki. - Ch. Ehresmann nyomán azt mondjuk, hogy a $\xi=(E,\pi,M)$ fibrált téren egy H horizontális strukturát adtunk meg, ha kijelöltük a τ_E lineáris érintőnyaláb vertikális résznyalábjának egy $H\xi$ Whitney-komplementerét. $H\xi$ -t ekkor ξ fölötti horizontális résznyalábnak nevezzük; totálterét HE -vel, projekcióját π_H -val jelölve, az eddigi gyakorlat szellemében $H\xi=(HE,\pi_H,E)\in$ $\in V\mathcal{B}(E)$ irható. $H\xi$ fibrumai a $H_zE:=\pi_H^{-1}(z)$ $(z\in E)$ horizontális alterek. Horizontális struktura birtokában, alkalmazva az I. fejezetben kiépitett apparátust, meglepően gazdag tartalmu és igen hatékony elmélet bontható ki - ezt igyekszünk érzékeltetni munkánk hátralevő részében. Nem fogunk légüres térben mozogni, érvényes ui. a

/10.1.1/ lemma Minden fibrált téren létezik horizontális struktura.

:: Elég csupán utalni a jólismert, rutin gondolatmenetre; mivel a totáltér parakompakt, bevezethető rajta egy g Riemann-metrika s a vertikális résznyaláb g -ortogonális komplementere horizontális strukturának bizonyul. ::

/10.2/ Legyen H horizontális struktura a $\xi=(E,\pi,M)$ fibrált téren s tekintsük a hozzátartozó Whitney-fölbontást karakterizáló

$$V\xi \underset{i_V}{\overset{p^V}{\rightleftarrows}} V\xi\oplus H\xi \underset{i_H}{\overset{p^H}{\rightleftarrows}} H\xi$$

direkt-összeg diagramot. Itt $p^V, i_V, p^H, i_H \in Mor_E(\tau_E,\tau_E)$ s per definitionem fennállnak a

$$p^V\circ i_V=1_{VE},\ p^V\circ i_H=o,\ p^H\circ i_V=o,\ p^H\circ i_H=1_{HE},\ i_V\circ p^V+i_H\circ p^H=1_{TE}$$

összefüggések. Mellőzve az i_H, i_V kanonikus injekciókat, utóbbit a szokásos pongyolasággal a $p^V+p^H=1$ alakban irjuk.

Közvetlenül adódik, hogy p^V és p^H komplementer projektorok: $p^V \circ p^V = p^V$, $p^H \circ p^H = p^H$, $p^V \circ p^H = p^H \circ p^V = 0$; rájuk a további-akban a "H-hoz tartozó vertikális ill. horizontális projektor" elnevezést használjuk. - Két egyszerü észrevétellel utat nyitunk a 8.§-ban vázolt algebrai apparátus számára.

/10.2.1/ lemma Legyen N egy sokaság. - A $Mor_N(\tau_N; \tau_N)$, $A^1(N; \tau_N)$, $End\,\mathcal{X}(N)$ és $\mathcal{X}^1_1(N)$ $C^\infty(N)$ -modulusok természetes módon izomorfak.

:: $Mor_N(\tau_N; \tau_N) \cong Sec\,End\,\tau_N \equiv Sec\,A^1(\tau_N; \tau_N) = A^1(N; \tau_N)$,

az első lépésben /2.7/-re, az utolsóban a /8.1/-beli definicióra való hivatkozással. Ugyancsak a /8.1/-ben mondottak szerint $A^1(N; \tau_N) \cong A^1_N(\mathcal{X}(N), \mathcal{X}(N)) \equiv End\,\mathcal{X}(N)$, $End\,\mathcal{X}(N)$ pedig jólismert módon $\mathcal{X}^1_1(N)$ -nel azonositható. ::

/10.2.2/ következmény Egy horizontális strukturához tartozó vertikális ill. horizontális projektor E fölötti, τ_E -értékü 1-formaként /speciálisan p^V $A^1(E; V\xi)$ elemeként/, $(1,1)$ -tenzormezőként és $\mathcal{X}(E) \longrightarrow \mathcal{X}(E)$ $C^\infty(E)$ -morfizmusként egyaránt interpretálható. ::

/10.3/ Egy $H\xi$ horizontális résznyaláb metszeteit horizontális vektormezőknek nevezzük és az $\mathcal{X}_H E := Sec\,H\xi$ jelölést használjuk az általuk alkotott $C^\infty(E)$ -modulusra. Már a tárgyalás e korai szakaszában szeretnénk kiemelni mint fundamentális tényt, hogy $\mathcal{X}_H E$ nem Lie-részmodulusa $\mathcal{X}(E)$ -nek /közelebbről: nem Lie-részalgebra/. Az innen eredő problémakört a 16. és 17.§-ban fogjuk diszkutálni. - /2.5.1/ értelmében a p^H és p^V projektor $p^H_* : \mathcal{X}(E) \longrightarrow \mathcal{X}_H E$, $X \longmapsto HX := p^H_*(X)$ ill. $p^V_* : X \in \mathcal{X}(E) \longmapsto VX := p^V_*(X)$ $C^\infty(E)$ -morfizmust indukál. Az igy definiált HX ill. VX vektormezőt X horizontális ill. vertikális részeként emlitjük /utóbbi is függ a horizontális strukturától!/. Világos, hogy $\forall\, X \in \mathcal{X}(E)$: $X = HX + VX$ s könnyen ellenőrizhető, hogy X csakis igy állitható elő horizontális és vertikális vektormező összegeként. Következik ilymódon a

/10.3.1/ állitás A $\xi = (E, \pi, M)$ fibrált téren adott minden $H: \tau_E = H\xi \oplus V\xi$ horizontális strukturához tartozik az $\mathcal{X}(E)$ $C^\infty(E)$ -modulusnak egy $\mathcal{X}(E) = \mathcal{X}_H E \oplus \mathcal{X}_V E$ direkt fölbontása az $\mathcal{X}_H E := Sec\,H\xi$ előirás szerint. ::

<u>/10.3.2/ megjegyzés</u> /10.3.1/-nek igaz mintegy a megfordítása is. Nevezetesen: $\mathcal{H}_V E$ egy $\mathcal{H}_H E$ direkt komplementerének kijelölése horizontális strukturát származtat ξ -n, ha a horizontális altereket a $H_z E := \{X(z) \mid X \in \mathcal{H}_H E\}$ előírással, a horizontális résznyaláb totálterét pedig ezek diszjunkt uniójaként értelmezzük. ::

Hasznos eljárást szolgáltat horizontális struktura konstruálására a

<u>/10.3.3/ állítás</u> Tegyük föl, hogy $\xi = (E, \pi, M)$ fibrált tér s legyen $\omega : \mathcal{H}(E) \times \mathcal{H}(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ bilineáris függvény. - Ha $\omega \upharpoonright \mathcal{H}_V E \times \mathcal{H}_V E$ nemelfajuló, akkor $(\mathcal{H}_V E)^{\perp(\omega)} := \{Y \in \mathcal{H}(E) \mid \forall X \in \mathcal{H}_V E : \omega(X, Y) = 0\}$ direkt komplementere $\mathcal{H}_V E$ -nek és ennélfogva egy H^ω horizontális strukturát határoz meg ξ -n.

:: Legyen $(V_z E)^\perp := \left\{v \in T_z E \;\middle|\; \begin{matrix} v = Y(z) \wedge \\ Y \in (\mathcal{H}_V E)^{\perp(\omega)} \end{matrix}\right\}$. Elég megmutatnunk, hogy $\forall z \in E : (V_z E)^\perp \oplus V_z E = T_z E$. Mivel $(V_z E)^\perp = \{v \in T_z E \mid \forall u \in V_z E : \omega_z(u, v) = 0\}$, ez következik a lineáris algebra egy fontos eredményéből / [GW], p.96/, megadjuk azonban egy direkt, önálló igazolását is. - A feltétel értelmében $\overline{\omega}_z := \omega_z \upharpoonright V_z E \times V_z E$ nemelfajuló, igy standard Gram-Schmidt érveléssel adódik, hogy $V_z E$ -nek létezik $(e_1, \dots, e_r)$ $\overline{\omega}_z$ - ortogonális bázisa. Ha $x \in T_z E$ tetszőleges, legyen $x_\parallel := \sum_{\alpha=1}^{r} \overline{\omega}_z(e_\alpha, x) e_\alpha$, $x_\perp := x - x_\parallel$. Ekkor $x_\parallel \in V_z E$ és $x_\perp \in (V_z E)^\perp$, ui. $\forall \beta \in \underline{r}$: $\overline{\omega}_z(e_\beta, x_\perp) = \overline{\omega}_z(e_\beta, x) - \overline{\omega}_z(e_\beta, \sum_{\alpha=1}^{r} \overline{\omega}_z(e_\alpha, x) e_\alpha) = \overline{\omega}_z(e_\beta, x) - \overline{\omega}_z(e_\beta, x) = 0$. Igy tehát $T_z E$ minden vektora előáll $V_z E$ -ből és $(V_z E)^\perp$ -ből vett vektorok összegeként. Ez az előállitás könnyen ellenőrizhető módon egyértelmü. ::

- A /10.3.3/-ban szereplő bilineáris függvényt a továbbiakban <u>v -reguláris</u>nak mondjuk.

<u>/10.3.4/ következmény</u>. Legyen $\xi = (E, \pi, M)$ fibrált tér, H horizontális struktura ξ -n, ω pedig v -reguláris bilineáris függvény $\mathcal{H}(E)$ -n. - A H^ω horizontális struktura pontosan akkor esik egybe H -val, ha $\forall X \in \mathcal{H}_V E$, $Y \in \mathcal{H}(E)$: $\omega(X, HY) = 0$.

:: /10.3.1/ és /10.3.2/ alapján nyilvánvaló, hogy $H = H^{\omega} \Longleftrightarrow \mathcal{X}_H E = \mathcal{X}_{H^\omega} E$. - Tegyük föl először, hogy $\mathcal{X}_H E = \mathcal{X}_{H^\omega} E$. Ekkor $\forall Y \in \mathcal{X}(E): HY \in \mathcal{X}_H E = \mathcal{X}_{H^\omega} E$ s ezért $\forall X \in \mathcal{X}_V E: \omega(X, HY) = 0$. Megforditva, az utóbbi feltétel teljesülésekor $Y \in \mathcal{X}_H E$ esetén $Y = HY$ s igy $\forall X \in \mathcal{X}_V E: \omega(X,Y) = \omega(X, HY) = 0 \Rightarrow Y \in \mathcal{X}_{H^\omega} E$, mig ha $Y \in \mathcal{X}_{H^\omega} E$, akkor

$\forall X \in \mathcal{X}_V E: \quad 0 = \omega(X,Y) = \omega(X, HY + VY) = \omega(X, VY)$,

ahonnan a v-regularitás miatt $VY = 0$, azaz $Y \in \mathcal{X}_H E$ következik. ::

<u>/10.3.5/ következmény</u> Tegyük föl, hogy H horizontális struktura a $\xi = (E, \pi, M)$ fibrált téren. Tetszőleges $\omega: \mathcal{X}(E) \times \mathcal{X}(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ bilineáris függvény esetén képezzük a $V^*\omega$ és $H^*\omega$ bilineáris függvényt az $(X,Y) \longmapsto \omega(VX, VY)$ ill. $(X,Y) \longmapsto \omega(HX, HY)$ előirással. - Ha ω v-reguláris, akkor $V^*\omega$ és $\tilde{\omega} := \omega - (H^\omega)^*\omega$ is az és

$$H = H^{V^*\omega}, \quad H^\omega = (H^\omega)^{\tilde{\omega}}$$

:: ω v-regularitása esetén $V^*\omega \restriction \mathcal{X}_V E \times \mathcal{X}_V E$ és $\tilde{\omega} \restriction \mathcal{X}_V E \times \mathcal{X}_V E$ nemelfajuló volta közvetlenül ellenőrizhető az értelmezés alapján. Mivel $\forall X \in \mathcal{X}_V E,\ Y \in \mathcal{X}(E)$: $V^*\omega(X, HY) = \omega(VX, V(HY)) = 0$, /10.3.4/ értelmében $H = H^{V^*\omega}$. Hasonlóképpen, $\forall X \in \mathcal{X}_V E,\ Y \in \mathcal{X}(E)$: $\tilde{\omega}(X, H^\omega Y) := \omega(X, H^\omega Y) - \omega(H^\omega X, H^\omega(H^\omega Y)) = \omega(X, H^\omega Y)$, s itt a jobboldal H^ω konstrukciójára //10.3.3// tekintettel eltünik. Igy - ismét /10.3.4/-re való hivatkozással - $H^\omega = (H^\omega)^{\tilde{\omega}}$. ::

<u>/10.3.6/ következmény</u> Legyen H horizontális struktura a ξ fibrált téren s tegyük föl, hogy $\omega: \mathcal{X}(E) \times \mathcal{X}(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ szimmetrikus vagy ferdeszimmetrikus v-reguláris függvény. Ekkor

$$H^\omega = H \Longleftrightarrow \forall Y \in \mathcal{X}_H E: i_Y\omega \quad \text{szemibázikus //5.3//.}$$

:: Tegyük föl, hogy ω szimmetrikus /a másik eset ugyanigy intézhető el/. Legyen $Z \in \mathcal{X}(E)$ tetszőleges. $i_{HZ}\omega$ pontosan akkor szemibázikus, ha $\forall X \in \mathcal{X}_V E: \ 0 = i_{HZ}\omega(X) = \omega(HZ, X) = \omega(X, HZ) \Leftrightarrow H^\omega = H$ //10.3.4//. Mivel $\forall Y \in \mathcal{X}_H E$: $\exists Z \in \mathcal{X}(E): Y = HZ$, kijelentésünk ezzel igazolást nyert. ::

/10.4/ Hogyan irható le egy horizontális struktura lokálisan? - A válasz alapja az igen egyszerü

/10.4.1/ lemma Legyen $\mathcal{A}$ az $\mathcal{R}$ /kommutativ, egységelemes/ gyürü fölötti modulus. Tegyük föl, hogy $\mathcal{A} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$ s hogy $(e_i)_{i=1}^{n+r}$ olyan bázisa $\mathcal{A}$ -nak, amelynek $(e_j)_{j=n+1}^{n+r}$ részrendszere $\mathcal{V}$ -nek bázisa. Ekkor egyértelmüen léteznek olyan $N_i^\alpha \in \mathcal{R}$ gyürüelemek, hogy $(e_i - N_i^\alpha f_\alpha)$, ahol $i \in \underline{n}$, $\alpha \in \underline{r}$, $f_\alpha := e_{n+\alpha}$ bázisa $\mathcal{H}$ -nak.

:: A direkt fölbontás miatt $\forall i \in \underline{n}$: $e_i = h_i + v_i$ $(h_i \in \mathcal{H}, v_i \in \mathcal{V})$, egy- és csak egyféleképpen. Itt v_i -szintén egyértelmüen- a $v_i = N_i^\alpha e_{n+\alpha} = N_i^\alpha f_\alpha$ alakban irható. Ekkor $\forall i \in \underline{n}$: $h_i = e_i - N_i^\alpha f_\alpha \in \mathcal{H}$. A (h_i) elemrendszer lineárisan független, hiszen $0 = \lambda^i h_i = \lambda^i e_i - \lambda^i N_i^\alpha f_\alpha \Rightarrow \lambda^1 = \dots = \lambda^n = 0$. ::

/10.4.2/ állitás Legyen H horizontális struktura a $\xi = (E, \pi, M)$ fibrált téren. Rögzitsünk E -n egy fibrált térképhez adaptált $(V; (x^i), (y^\alpha))$ $(i \in \underline{n}, \alpha \in \underline{r})$ térképet //3.3//. Ekkor egyértelmüen léteznek olyan $N_i^\alpha : V \to \mathbb{R}$ sima függvények - H paraméterei az alapulvett térképre vonatkozóan -, hogy a $\frac{\delta}{\delta x^i} := \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ $(i \in \underline{n})$ V fölötti vektormezők lokális bázisát képezik $H\xi$ -nek.

:: $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)$ lokális bázisa $\mathfrak{X}(E)$ -nek. Mivel $\mathfrak{X}(E) = \mathfrak{X}_H E \oplus \mathfrak{X}_V E$ //10.3.1// és $\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)$ lokális bázisa $\mathfrak{X}_V E$ -nek //4.3//, /10.4.1/ alapján egyszerüen következik az állitás. ::

- Egy horizontális struktura különböző térképekhez tartozó paraméterei természetesen különbözők, különbözőségükben azonban "van rendszer": koordináta csere alkalmával egyértelmü transzformációs szabálynak engedelmeskednek. Ez a szabály könnyen levezethető, nekünk azonban nem lesz szükségünk rá.

/10.4.3/ következmény /10.4.2/ jelöléseivel élve, $\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right), \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)$ lokális bázisa $\mathfrak{X}(E)$-nek; ezt a H horizontális strukturához adaptált lokális bázisnak mondjuk. ::

/10.4.4/ következmény A H horizontális strukturához tartozó horizontális és vertikális projekció által indukált $X \in \mathcal{X}(E) \longmapsto HX \in \mathcal{X}_H E$ ill. $X \in \mathcal{X}(E) \longmapsto VX \in \mathcal{X}_V E$ leképezést //10.3// H paraméterei segitségével az

$$X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \longmapsto X^i \frac{\delta}{\delta x^i} \quad \text{ill.} \quad X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \longmapsto (Y^\alpha + X^i N^\alpha_i)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}$$

formula irja le. Speciálisan a $\pi^H \restriction T_z E, \pi^V \restriction T_z E$ lineáris operátorokat a $\left(\frac{\delta}{\delta x^i}(z)\right), \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}(z)\right)$ adaptált bázisra vonatkozóan n - ill. r -rangu, $+1$ átlóselemekkel rendelkező diagonálmatrix reprezentálja. ::

/10.4.5/ következmény Továbbra is megtartva /10.4.2/ jelöléseit, a $\delta y^\alpha := N^\alpha_i dx^i + dy^\alpha$ $(\alpha \in \underline{r})$ 1-formák lokálisan annullálják $\mathcal{X}_H E$ -t, következésképpen $H\xi$ lokálisan a $\delta y^\alpha = 0$ $(\alpha \in \underline{r})$ Pfaff-rendszer megoldásnyalábja. ::

- Megadjuk végül a σ -reguláris bilineáris függvények által származtatott horizontális strukturák //10.3.3// lokális leirását.

/10.4.6/ következmény Tegyük fel, hogy a $(V; (x^i),(y^\alpha))$ térkép rögzitése után az $\omega: \mathcal{X}(E) \times \mathcal{X}(E) \to C^\infty(E)$ bilineáris függvény koordinátaelőállitása

$$\omega \restriction V = A_{ij}\, dx^i \otimes dx^j + B_{i\alpha}\, dx^i \otimes dy^\alpha + C_{\alpha i}\, dy^\alpha \otimes dx^i + D_{\alpha\beta}\, dy^\alpha \otimes dy^\beta$$

$$(A_{ij}, B_{i\alpha}, C_{\alpha i}, D_{\alpha\beta} \in C^\infty(E);\ i,j \in \underline{n};\ \alpha,\beta \in \underline{r}).$$

- ω pontosan akkor σ -reguláris, ha $\forall z \in V:\ \det(D_{\alpha\beta}(z)) \neq 0$.
$(D_{\alpha\beta}(z))$ inverz matrixát $(D^{\alpha\beta}(z))$ -vel jelölve, a H^ω horizontális struktura paraméterei az $N^\alpha_i = C_{\lambda i} D^{\lambda\alpha}$ $(i \in \underline{n}, \alpha \in \underline{r})$ függvények.

:: Mivel $\omega \restriction \mathcal{X}_V E \times \mathcal{X}_V E$ V fölötti koordinátakifejezése $D_{\alpha\beta} dy^\alpha \otimes dy^\beta$, a σ -regularitás mondott kritériumát egyszerű lineáris algebra adja. Amennyiben H^ω paraméterei az N^α_i függvények, ugy

$$\forall i \in \underline{n},\ \lambda \in \underline{r}:\quad 0 = \omega\left(\frac{\partial}{\partial y^\lambda}, \frac{\partial}{\partial x^i} - N^\alpha_i \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) = \omega\left(\frac{\partial}{\partial y^\lambda}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) -$$

$$- N^\alpha_i\, \omega\left(\frac{\partial}{\partial y^\lambda}, \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) = C_{\lambda i} - N^\alpha_i D_{\lambda\alpha} \Longrightarrow \underline{N^\alpha_i = C_{\lambda i} D^{\lambda\alpha}}.$$

::

11.§. Horizontális fölemelés

/11.1/ Egy $\xi=(E,\pi,M)$ fibrált teret és - meggondolásaink első felében - egy ξ fölötti horizontális strukturát tételezünk adottnak, amelyet továbbra is H -val jelölünk. Ha közelebbit nem mondunk, /10.4.2/-nek megfelelően koordinátázunk. - Egy $X\in\mathfrak{X}(M)$ vektormező /H szerinti/ horizontális liftjén olyan $X^H\in\mathfrak{X}_H\cap\mathfrak{X}_pE$ vektormezőt értünk, amelyre $X^H \overset{\pi}{\sim} X$.

/11.1.1/ lemma Horizontális struktura rögzitése után a bázissokaság minden vektormezőjének egyértelmüen létezik horizontális liftje.

:: Tegyük föl, hogy $X\in\mathfrak{X}(M)$ s legyen $X\restriction\pi(V)=X^i\frac{\partial}{\partial u^i}$.

Egyszerü számolással ellenőrizhető, hogy az $X^H\restriction V:=$ $=(X^i\circ\pi)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}-N^\alpha_i\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)$ előirás korrekt módon definiál egy $X^H\in\mathfrak{X}_HE$ vektormezőt, s ez horizontális liftje X -nek. X^H unicitását /5.4.1/ garantálja. ::

- /11.1.1/ lehetővé teszi, hogy a H horizontális struktura birtokában bevezethessük az $\ell^H:\mathfrak{X}(M)\longrightarrow\mathfrak{X}_HE\cap\mathfrak{X}_pE$, $X\longmapsto\ell^H(X):=X^H$ leképezést; ezt a H -hoz tartozó horizontális fölemelésnek nevezzük. ℓ^H alapvető tulajdonságait rögziti a

/11.1.2/ állitás A horizontális fölemelés vetithető τ_E -értékü 1-forma, nevezetesen - az eddigi jelölésekkel - $\ell^H\in A^1_p(M;\tau_E)$. ℓ^H vetitett formája $\mathfrak{X}^1_1(M)$ egységtenzora, koordinátaelőállitása $\ell^H\restriction V=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}-N^\alpha_i\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)\otimes dx^i$.

:: Mivel $(X+Y)^H\overset{\pi}{\sim}X+Y$ és $X^H+Y^H\overset{\pi}{\sim}X+Y$ /5.4.1/-re való hivatkozással $(X+Y)^H=X^H+Y^H$. Az is közvetlenül adódik, hogy $\forall f\in C^\infty(M)$, $X\in\mathfrak{X}(M)$: $(f\circ\pi)X^H\in\mathfrak{X}_HE$ és $(f\circ\pi)X^H\overset{\pi}{\sim}fX$, következőleg ℓ^H $\pi^*C^\infty(M)$ -lineáris leképezése $\mathfrak{X}(M)$ -nek $\mathfrak{X}_HE\cap\mathfrak{X}_pE$ -be, s ez /8.2.2/-re tekintettel azt jelenti, hogy $\ell^H\in A^1_p(M;\tau_E)$. Az, hogy $\overline{\ell^H}\in A^1(M;\tau_M)\cong\mathfrak{X}^1_1(M)$ //10.2.1// az egységtenzor, ℓ^H

jelentéséből világos. Végül X^H koordináta kifejezése /8.1/ figyelembevételével azonnal elvezet ℓ^H koordinátaelőállításához. ::

/11.2/ A horizontális fölemelés vetithető vektorértékü formaként való interpretálása horizontális strukturák megadásának egy elegáns és hatásos módját adja kezünkbe.

<u>/11.2.1/ állitás</u> Legyen $\xi=(E,\pi,M)$ fibrált tér, $\Gamma\in A^1_p(M;\tau_E)$ s tegyük föl, hogy $\overline{\Gamma}$ $\mathcal{X}^1_1(M)$ egységtenzora. Jelentse $\mathcal{X}_\Gamma E$ a $\{\Gamma(X)\mid X\in\mathcal{X}(M)\}$ $\pi^*C^\infty(M)$ -modulus $C^\infty(E)$ -lineáris lezártját. Ekkor $\mathcal{X}(E)=\mathcal{X}_\Gamma E\oplus\mathcal{X}_V E$, következésképpen Γ egy H^Γ horizontális strukturát származtat ξ -n, amelyet $\mathrm{Sec}\, H^\Gamma\xi=\mathcal{X}_\Gamma E$ karakterizál.

:: /8.2.3/ értelmében Γ lokális előállitása

$$\Gamma\restriction V=\left(B^j_i\frac{\partial}{\partial x^j}-\Gamma^\alpha_i\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)\otimes dx^i\quad\left(B^j_i\in\pi^*C^\infty(M),\ \Gamma^\alpha_i\in C^\infty(E)\right)$$

alaku, s igy a vetitett forma koordinátakifejezése

$\overline{\Gamma}\restriction V=B^j_i\frac{\partial}{\partial x^j}\otimes dx^i$. Mivel $\overline{\Gamma}$ az egységtenzor, következik, hogy $B^j_i=\delta^j_i$ s ezért $\Gamma\restriction V=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}-\Gamma^\alpha_i\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)\otimes dx^i$ Ilymódon $\mathcal{X}_\Gamma E$ -t lokálisan a $\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)=\frac{\partial}{\partial x^i}-\Gamma^\alpha_i\frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ $(i\in\mathbf{n})$ vektormezők generálják. Adódik mármost, hogy lokálisan minden $X\in\mathcal{X}(E)$ vektormező egyértelmüen előáll egy $\mathcal{X}_\Gamma E$ -ből s egy $\mathcal{X}_V E$ -ből vett vektormező összegeként, nevezetesen $X\restriction V=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}+Y^\alpha\frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ esetén $X\restriction V=X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}-\Gamma^\alpha_i\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)+\left(Y^\alpha+X^i\Gamma^\alpha_i\right)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ formában. Lévén a probléma lokális jellegü, ebből következik az állitás. ::

– A /11.2.1/ által leirt $\Gamma\in A^1_p(M;\tau_E)$ formát a továbbiakban <u>liftelő formá</u>ként emlitjük. A horizontális strukturák és a liftelő formák kapcsolata a lehető legbensőségesebb:

<u>/11.2.2/ következmény</u> Legyen H horizontális struktura a ξ fibrált téren s tegyük föl, hogy $\Gamma\in A^1_p(M;\tau_E)$ liftelő forma. – $H^\Gamma=H \iff \Gamma=\ell^H$. ::

/11.3/ E szakasz lezárásaként a horizontális fölemelés néhány további, fontos tulajdonságát tárgyaljuk. Mivel metszet vertikális liftjét //4.4.3// fogjuk szerepeltetni, azzal a megszoritással kell élnünk, hogy $\xi\in VB(M)$.

<u>/11.3.1/ állitás</u> Tegyük föl, hogy H horizontális struktura a ξ vektornyalábon s tekintsük a H -hoz tartozó ℓ^H horizontális fölemelést. - $\forall X \in \mathcal{X}(M),\ \sigma \in Sec\,\xi$: $[X^H, \sigma^v] \in \mathcal{X}_V E$, az

$$\mathcal{X}(M) \times Sec\,\xi \longrightarrow \mathcal{X}_V E,\quad (X,\sigma) \longmapsto [X^H, \sigma^v]$$

leképezés $\mathbb{R}$-bilineáris s teljesül rá, hogy $\forall f \in C^\infty(M)$:

$$[(fX)^H, \sigma^v] = (f\circ\pi)[X^H,\sigma^v]\ ;\ [X^H, (f\sigma)^v] = (f\circ\pi)[X^H,\sigma^v] + [(Xf)\circ\pi]\sigma^v.$$

:: $X^H \overset{\pi}{\sim} X$ és $\sigma^v \overset{\pi}{\sim} 0$ miatt $[X^H,\sigma^v] \overset{\pi}{\sim} [X,0] = 0 \Rightarrow [X^H,\sigma^v] \in \mathcal{X}_V E$. /11.1.2/ valamint /4.4.3/ értelmében mind az $X \longmapsto X^H$, mind pedig a $\sigma \longmapsto \sigma^v$ leképezés $\mathbb{R}$ -lineáris; ebből adódóan az $(X,\sigma) \longmapsto [X^H,\sigma^v]$ leképezés $\mathbb{R}$ -bilineáris. Ugyancsak /11.1.2/, továbbá /4.3.1/ figyelembevételével $[(fX)^H, \sigma^v] = [(f\circ\pi)X^H, \sigma^v] = (f\circ\pi)[X^H,\sigma^v] + \sigma^v(f\circ\pi)X^H = (f\circ\pi)[X^H,\sigma^v]$, mig /4.4.3/ alkalmazásával $[X^H, (f\sigma)^v] = [X^H, (f\circ\pi)\sigma^v] = (f\circ\pi)[X^H,\sigma^v] + X^H(f\circ\pi)\sigma^v$, itt viszont - mint az X^H lokális előállitásából kiolvasható - $X^H(f\circ\pi) = (Xf)\circ\pi$. ::

<u>12.§. Horizontális és vertikális leképezés. Konnexiónyaláb</u>

/12.0/ Az előző szakasz stratégiáját követjük. Horizontális struktura birtokában most először un. <u>horizontális leképezést</u> konstruálunk, majd megmutatjuk, hogy a követett ut visszafelé is járható - igy horizontális struktura származtatására ujabb, fontos módszert nyerünk.

/12.1/ Legyen $\xi = (E,\pi,M)$ fibrált tér s tekintsük a ξ -ből kiindulva képzett

$$(\mathcal{S})\qquad 0 \longrightarrow V\xi \xrightarrow{\ \iota\ } \tau_E \xrightarrow{\ \mu\ } \pi^*\tau_M \longrightarrow 0$$

kanonikus egzakt sorozatot //4.1.1//. Itt - a kézenfekvő $\pi^*\tau_M \cong \left(\bigcup_{z\in E} T_{\pi(z)}M,\ pr_2,\ E\right)$ interpretációra épitve - a μ leképezést /ha ugy kényelmesebb/ $T\pi$ -vel azonosithatjuk. Rövidesen igazoljuk, hogy (S) fölhasadó, hasításait - vagyis az olyan $\gamma : \pi^*\tau_M \to \tau_E$ E -morfizmusokat, amelyekre $\mu \circ \gamma = 1$ -horizontális leképezéseknek nevezzük. Triviális, de fontos körülmény, hogy $Mor_E(\pi^*\tau_M, \tau_E) \cong Sec\,Hom(\pi^*\tau_M, \tau_E)$ //2.7// folytán a horizontális leképezések a $Hom(\pi^*\tau_M, \tau_E)$ homomorfizmus-nyaláb metszeteiként is interpretálhatók.

/12.1.1./állitás Tegyük föl, hogy H horizontális struktura a ξ fibrált téren. Ekkor $\forall z \in E$: $T_z\pi \upharpoonright H_zE$ bijektiv, $\mathcal{H}_z := (T_z\pi \upharpoonright H_zE)^{-1} \in Hom(T_{\pi(z)}M, T_zE)$ és a $\mathcal{H} : z \in E \longmapsto \mathcal{H}_z$ leképezés horizontális leképezés, amelyet a megadott horizontális strukturához tartozó horizontális leképezésnek mondunk. Amennyiben H paraméterei az N_i^α függvények //10.4.2//, ugy $\forall z \in E$: $\mathcal{H}(z, (\frac{\partial}{\partial u^i})_{\pi(z)}) = \mathcal{H}_z(\frac{\partial}{\partial u^i} \circ \pi(z)) = (\frac{\partial}{\partial x^i})_z - N_i^\alpha (\frac{\partial}{\partial y^\alpha})_z$ $(i \in \underline{n})$, következésképpen $Im\,\mathcal{H} = H\xi$.

:: $Ker(T_z\pi \upharpoonright H_zE) = \{0\}$ lévén, $T_z\pi \upharpoonright H_zE$ lineáris izomorfizmus, igy létezik $\mathcal{H}_z := (T_z\pi \upharpoonright H_zE)^{-1} \in Hom(T_{\pi(z)}M, T_zE)$ s evidens, hogy $T_z\pi \circ \mathcal{H}_z = 1_{T_{\pi(z)}M}$. $Sec\,Hom(\pi^*\tau_M, \tau_E) \cong Mor_E(\pi^*\tau_M, \tau_E)$ folytán ekkor a $z \in E \longmapsto \mathcal{H}_z$ leképezés horizontális leképezés. $\forall i \in \underline{n}$: $\mathcal{H}_z(\frac{\partial}{\partial u^i})_{\pi(z)} = A_i^j [(\frac{\partial}{\partial x^j})_z - N_j^\alpha (\frac{\partial}{\partial y^\alpha})_z]$, hiszen horizontális vektorról van szó. Itt a $T_z\pi \circ \mathcal{H}_z = 1$ feltétel miatt $(A_i^j) = (\delta_i^j)$, $\mathcal{H}_z$ koordinátaelőállitása tehát a mondott alaku. Ebből - pl. /10.4.2/ figyelembevételével - $Im\,\mathcal{H} = H\xi$ teljesülése is kiolvasható. ::

/12.1.2/ állitás (S) hasításai - vagyis a horizontális leképezések - és a ξ fölötti horizontális strukturák között a $\gamma \longmapsto Im\,\gamma$ leképezés bijekció.

:: Legyen $\gamma \in Mor_E(\pi^*\tau_M, \tau_E)$ horizontális leképezés. Megmutatjuk, hogy az $Im\,\gamma$ képtér horizontális résznyaláb. - Tegyük föl, hogy $v \in Im\,\gamma_z \cap V_zE$ $(z \in E$, $\gamma_z := \gamma \upharpoonright T_{\pi(z)}M)$. Ekkor $\exists\, a \in T_{\pi(z)}M$: $v = \gamma_z(a)$ és $0 = T_z\pi(v) = T_z\pi \circ \gamma_z(a) = a$, amiből $v = 0$ is következik. Ilymódon $Im\,\gamma_z \cap V_zE = \{0\}$. Dimenzionalitási okokból $Im\,\gamma_z + V_zE = T_zE$ is fennáll, hiszen $T_z\pi \circ \gamma_z = 1$ folytán γ_z injektiv. Ezzel igazoltuk $Im\,\gamma_z \oplus V_zE = T_zE$ teljesülését. - /12.1.1/ értelmében minden horizontális struktura előáll egy horizontális leképezés - a hozzátartozó horizontális leképezés - képnyalábjaként, a $\gamma \longmapsto \operatorname{Im}\gamma$ leképezés injektiv volta pedig triviálisan ellenőrizhető. ::

/12.2/ Látjuk, hogy a horizontális leképezések a $\operatorname{Hom}(\pi^*\tau_M, \tau_E)$ homomorfizmus-nyaláb metszetei közül kerülnek ki. Most pontositjuk ezt az észrevételt.

/12.2.1/ lemma Alapulvéve a $\xi = (E, \pi, M)$ fibrált teret, tetszőleges $z \in E$ esetén képezzük az $\widetilde{E}_z :=$
$= \{h \in \operatorname{Hom}(T_{\pi(z)}M, T_zE) \mid T_z\pi \circ h = 1\}$ halmazokat s legyen $\widetilde{E} = \bigsqcup_{z \in E} \widetilde{E}_z$;
$\widetilde{\pi} : \widetilde{E} \longrightarrow E,\ h \in \widetilde{E}_z \longmapsto \widetilde{\pi}(h) := z$. - Az $\widetilde{E}$ halmazon egyértelmüen létezik olyan sokaság-struktura, amellyel a $\widetilde{\xi} := (\widetilde{E}, \widetilde{\pi}, E)$ hármas fibrált térré válik. A $\widetilde{\xi}$ fibrált tér kanonikusan azonositható $\mathcal{A}\mathfrak{J}\xi$ -vel //6.3.2//.

:: A tett kijelentések kiolvashatók /6.3.4/ bizonyitásából. ::

/12.2.2/ állitás A ξ fibrált tér fölötti horizontális leképezések éppen az $\mathcal{A}\mathfrak{J}\xi$ affin nyaláb metszetei - következésképpen $\forall \gamma \in \operatorname{Sec}\mathcal{A}\mathfrak{J}\xi : \operatorname{Im}\gamma$ horizontális résznyaláb. Megforditva, minden ξ -n adott horizontális struktura $\mathcal{A}\mathfrak{J}\xi$ egy egyértelmüen meghatározott /globális/ metszetéhez tartozik, a most jelzett módon.

:: /12.2.1/ garantálja, hogy $\mathcal{A}\mathfrak{J}\xi$ metszetei horizontális leképezések. Ezt tudva, a további kijelentések a /12.1.2/-ben foglaltak egyszerü ujrafogalmazásai. ::

- A most tett észrevételekre, valamint a horizontális strukturák és a konnexiók 18.§-ban diszkutálásra kerülő kapcsolatára tekintettel az $\mathcal{A}\mathfrak{J}\xi$ nyalábot a ξ -hez tartozó konnexiónyalábnak is nevezzük.

/12.2.3/ következmény Ha γ_1 és γ_2 horizontális leképezés, $f_1, f_2 \in C^\infty(E)$, ugy $f_1\gamma_1 + f_2\gamma_2$ pontosan akkor horizontális leképezés, ha $f_1 + f_2 = 1$.

:: $\gamma_1, \gamma_2 \in \operatorname{Sec}\mathcal{A}\mathfrak{J}\xi$ //12.2.2// miatt $\mathcal{A}\mathfrak{J}\xi$ affin voltára //6.3.4// tekintettel az állitás világos. ::

/12.2.4/ következmény Legyen H N_i^α $(i \in \underline{n}, \alpha \in \underline{r})$ paraméterekkel rendelkező horizontális struktura ξ -n s tegyük föl, hogy $\gamma \in \operatorname{Sec}\mathcal{A}\mathfrak{J}\xi$. - $\operatorname{Im}\gamma = H\xi \Longleftrightarrow$

$\forall i \in \underline{n}, \alpha \in \underline{r} : y^{\alpha}_{i} \circ \gamma = - N^{\alpha}_{i}$, ahol $y^{\alpha}_{i} : JE \longrightarrow \mathbb{R}$ a /6.3.3/-ban bevezetett koordinátafüggvények.

:: Jelölje $\mathcal{H}$ a H -hoz tartozó horizontális leképezést. Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Im}\,\gamma = H\xi$ pontosan akkor teljesül, ha $\forall z \in E : \gamma(z) = \mathcal{H}_z$. $\mathcal{H}_z \in \mathrm{Hom}\left(T_{\pi(z)}M, T_z E\right)$ a /6.3.4/ bizonyitásában leirt módon olyan $\partial_x \sigma \in (JE)_z$ $(z = \sigma(x))$ 1-jettel azonositható, ahol $y^{\alpha} \circ \sigma = \sigma^{\alpha} = - N^{\alpha}_{i}(z) u^{i}$, következőleg $\mathrm{Im}\,\gamma = H\xi \Longleftrightarrow \forall z \in E, (i, \alpha) \in \underline{n} \times \underline{r}$:
$y^{\alpha}_{i} \circ \gamma(z) = \frac{\partial \sigma^{\alpha}}{\partial u^{i}}(x) = - N^{\alpha}_{i}(z)$. ::

/12.3/ (S) horizontális leképezésekhez komplementer baloldali hasitásaira vetünk végül egy pillantást.

<u>/12.3.1/ állitás</u> Tetszőleges $\gamma \in \mathrm{Mor}_E(\pi^*\tau_M, \tau_E)$ horizontális leképezéshez létezik egy és csak egy olyan $\vartheta : \tau_E \longrightarrow V\xi$ E -morfizmus - a γ -hoz tartozó <u>vertikális leképezés</u> - amelyre $\mathrm{Ker}\,\vartheta = \mathrm{Im}\,\gamma$ és $\vartheta \circ i = 1$ teljesül. ϑ azonositható az $\mathrm{Im}\,\gamma$ horizontális strukturához tartozó vertikális projektorral s igy $A^1(E; V\xi)$ elemeként is interpretálható.

- Megforditva, ha $\vartheta \in A^1(E; V\xi)$ és $\forall z \in E : \vartheta(z) \restriction V_z E = 1$, akkor $\mathrm{Ker}\,\vartheta$ horizontális struktura ξ -n.

:: Az $\mathrm{Im}\,\gamma$ horizontális struktura rögzitése után tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(E)$ vektormező egyértelmü módon $X = HX + VX$ $(HX \in \mathrm{Sec}\,\mathrm{Im}\,\gamma, VX \in \mathfrak{X}_V E)$ alakban irható //10.3//. Tekinthetjük igy a $\vartheta : \mathfrak{X}(E) \longrightarrow \mathfrak{X}(E), X \longmapsto \vartheta X := VX$ leképezést, amely - /10.2.1/ alapján közvetlenül látható módon - éppen a kivánt leképezés. - A megforditás feltételei mellett $\forall z \in E : T_z E = \mathrm{Ker}\,\vartheta(z) \oplus V_z E$, hiszen $\forall a \in T_z E : a = [a - \vartheta(z)(a)] + \vartheta(z)(a)$, s itt $\vartheta(z) \restriction V_z E = 1$ miatt $a - \vartheta(z)(a) \in \mathrm{Ker}\,\vartheta(z)$ s ugyanilyen okból $\mathrm{Ker}\,\vartheta(z) \cap V_z E = \{0\}$ is fennáll. ::

<u>/12.3.2/ következmény</u> $\mathcal{A} J\xi$ minden globális metszetéhez létezik egy és csak egy olyan $\vartheta \in A^1(E; V\xi)$ 1-forma, hogy $\mathrm{Ker}\,\vartheta$ megegyezik az illető metszet által meghatározott horizontális strukturával.

:: Kijelentésünk /12.2.2/ és /12.3.1/ "egybeolvasása". ::

13.§. Vertikális projekció és tranzláció. Konnektorok

/13.1/ Folytatjuk a /12.3/-ban megkezdett gondolatsort, a /12.0/-ban vázoltak jegyében. - Ha a /12.3.1/ által karakterizált $\varphi \in A^1(E; V\xi)$ 1-formát $\tau_E \longrightarrow \tau_E$ E-morfizmusként interpretáljuk, gyakran mind a jelölést, mind a szóhasználatot módositjuk. Nevezetesen: egy $\underline{v} : \tau_E \longrightarrow \tau_E$ E-morfizmust <u>vertikális projektornak</u> mondunk, ha $\mathrm{Im}\,\underline{v} = V\xi$ és $\underline{v} \upharpoonright V\xi = 1$. Ekkor $\underline{h} := 1 - \underline{v}$ ugyancsak E-morfizmusa τ_E-nek,; ezt a $\underline{v}$-hez tartozó <u>horizontális projektorként</u> emlitjük. Automatikusan adódik az eddig kifejtett elméletből a

<u>/13.1.1/ következmény</u> Amennyiben H horizontális struktura a ξ fibrált téren, ugy p^v és p^H //10.2// vertikális ill. horizontális projektor a /13.1/ szerinti értelemben. Megforditva, ha $\underline{v} \in \mathrm{Mor}_E(\tau_E ; \tau_E)$ vertikális projektor, akkor a $\gamma : \pi^*(\tau_M) \longrightarrow \tau_E$, $(a, T\pi(a)) \longmapsto \underline{h}(a) = a - \underline{v}(a)$ $(a \in T_* E)$ leképezés horizontális leképezés //12.1// és igy $\mathrm{Ker}\,\underline{v} = \mathrm{Im}\,\underline{h} = \mathrm{Im}\,\gamma$ horizontális struktura ξ-n. ::

/13.2/ Egy "kellően általános" tárgyalással szemben jogos elvárás, hogy - durván fogalmazva - tegye világossá, "mely dolgok min mulnak". Ebből a szempontból /ld. majd a 18.§-t!/, de önálló érdekessége folytán is fontos a következő konstrukció, amely lehetővé teszi a vertikális projektorok - s igy közvetve a horizontális strukturák! - beágyazását tágabb fogalmi keretek közé. - Vegyük alapul a $\xi = (E, \pi, M)$ fibrált teret s tekintsük a /6.2.4/-ben konstruált $\mathcal{A}\tau_E = (TE, (\pi_E, T\pi), E \times_M TM)$ affin nyalábot. Ha $(\underline{v}, p r_1)$ AB-morfizmus //6.2// $\mathcal{A}\tau_E$ és a $V\xi$ vertikális nyaláb mint affin nyaláb között, s $(\underline{v}, pr_1)$ csatolt VB-morfizmusa //6.2.3// az $1 \in \mathrm{Mor}_E(V\xi, V\xi)$, akkor azt mondjuk, hogy a $\underline{v} : TE \longrightarrow VE$ leképezés <u>vertikális tranzláció</u> ξ fölött. Közvetlenül nyilvánvaló a definiciókból a

<u>/13.2.1/ állitás</u> Egy $\underline{v} : TE \longrightarrow VE$ vertikális tranzláció pontosan akkor vertikális projektor, ha a τ_E lineáris érintőnyaláb fibrumain lineáris. ::

/13.3/ Rögzitve ξ totálterén egy fibrált térképhez adaptált $(V, (x^i), (y^\alpha))$ térképet /3.3/, megadjuk a vertikális tranzlációk koordinátaelőállitását. - Legyen $z \in V$, $v = v^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\pi(z)} \in T_{\pi(z)}M$. /6.2.4/ bizonyitásából kiolvasható, hogy ekkor $\mathcal{A}\tau_E\,(TE)_{(z,v)}$ fibrumának minden eleme egyértelmüen előállitható $v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z + A^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z$, $(A^1,\dots,A^r) \in \mathbb{R}^r$ alakban. Ha $\underline{v}$ vertikális tranzláció, akkor - lévén most a csatolt VB -morfizmus τ_E identitása - /6.2.3/-ból következően

$\forall\ v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z + A^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z,\ v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z + B^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z \in (TE)_{(z,v)}$:

$\underline{v}\left(v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z + A^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z\right) - \underline{v}\left(v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z + B^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z\right) = (A^\alpha - B^\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z$;

speciálisan $\underline{v}\left(v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z + A^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z\right) = \underline{v}\left(v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z\right) + A^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z$. Itt $\underline{v}\left(v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z\right) \in V_z E$ s igy $\underline{v}\left(v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z\right) = N^\alpha(z,(v^1,\dots,v^n))\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z$

irható, egyértelmüen meghatározott együtthatókkal. - Meggondolásunkból közvetlenül adódik a

<u>/13.3.1/ állitás</u> Fibrált térkép rögzitése után minden $\underline{v}: TE \longrightarrow VE$ vertikális tranzlációhoz egyértelmüen léteznek olyan $N^\alpha: V \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $(\alpha \in \underline{r})$ függvények, a vertikális tranzláció ún. <u>paraméterei</u>, hogy $\forall\ v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z + A^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z \in (TE)_{(z,v)}$:

$$\underline{v}\left(v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z + A^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z\right) = \left[N^\alpha(z,(v^1,\dots,v^n)) + A^\alpha\right]\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z. \quad ::$$

- Leirjuk, hogyan tükröződik egy vertikális tranzláció <u>projektor</u> volta a paraméterekben.

<u>/13.3.2/ állitás</u> Legyen $\underline{v}: TE \longrightarrow VE$ vertikális tranzláció, N^α $(\alpha \in \underline{r})$ paraméterekkel. $\underline{v}$ pontosan akkor vertikális projektor, ha $\forall z \in V,\ \alpha \in \underline{r}:\ N^\alpha_z: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(v^1,\dots,v^n) \longmapsto N^\alpha_z(v^1,\dots,v^n) := N^\alpha(z,(v^1,\dots,v^n))$ lineáris függvény.

:: A linearitási feltétel teljesülése esetén egyértelmüen megadhatók olyan $N^\alpha_i: V \longrightarrow \mathbb{R}$ $(\alpha \in \underline{r},\ i \in \underline{n})$ függvények, hogy $\forall z \in V$, $(v^1,\dots,v^n) \in \mathbb{R}^n$: $N^\alpha_z(v^1,\dots,v^n) = v^i N^\alpha_i(z)$ s igy

$\underline{v}\left(v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z + A^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z\right) = v^i N^\alpha_i(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z + A^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z = v^i N^\alpha_z((\delta^j_i))\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z +$
$+ A^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z = v^i \underline{v}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z\right) + A^\alpha \underline{v}\left(\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z\right)$, tehát $\underline{v} \restriction T_z E$ lineáris, s

mint ilyen, /13.2.1/ folytán vertikális projektor. Megfordítva, amennyiben vertikális projektor, ugy egyrészt //13.3.1// $\underline{v}\left(v^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z\right)=N_z^\alpha(v^1,\dots,v^n)\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z$, másrészt a linearitás miatt $\underline{v}\left(v^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z\right)=v^i N_i^\alpha(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z$ irható, következőleg az N_z^α függvények lineárisak. ::

/13.4/ Tegyük föl ebben a pontban, hogy $\xi=(E,\pi,M)$ vektornyaláb. Legyen adva egy $\underline{v}: TE \longrightarrow VE$ leképezés s képezzük a $k: VE \longrightarrow E$ kanonikus leképezés //4.2// segitségével a $C := k\circ\underline{v} : TE \longrightarrow E$ kompoziciót. C -t - $\underline{v}$ -hez tartozó - prekonnektornak, konnektornak ill. lineáris konnektornak mondjuk aszerint, amint $\underline{v}$ vertikális tranzláció, vertikális projektor ill. a $T\xi$ tangens fibrálás //3.4.3// fibrumain is lineáris vertikális projektor. - A következő észrevétel - /13.1.1/ figyelembevételével - megadja a kapcsolatot a horizontális strukturák és a konnektorok között.

/13.4.1/ állitás Legyen $\xi=(E,\pi,M)\in VB$, $(C,\pi)\in Mor(\tau_E;\xi)$. C pontosan akkor konnektor, ha $\forall\sigma\in Sec\,\xi$: $C\circ\sigma^V=\sigma\circ\pi$.

:: Tegyük föl, hogy C konnektor. Ez - per definitionem - azt jelenti, hogy $C=k\circ\underline{v}$, ahol $\underline{v}$ vertikális projektor. Igy $\forall\sigma\in Sec\,\xi$: $C\circ\sigma^V=k\circ\underline{v}\circ\sigma^V=k\circ\sigma^V=\sigma\circ\pi$, tekintettel σ^V /4.4.3/-beli konstrukciójára. A konnektorok tehát eleget tesznek a megadott feltételnek.

- Megforditva, ha $\forall\sigma\in Sec\,\xi$: $C\circ\sigma^V=\sigma\circ\pi$, ugy tetszőleges $z\in E$ esetén legyen $C_z := C\restriction T_zE$, $\underline{v}_z := k_z^{-1}\circ C_z$ s definiáljuk a $\underline{v}$ leképezést a $\underline{v}\restriction T_zE := \underline{v}_z$ előirással. Evidens, hogy ekkor $Im\,\underline{v}\subset VE$. Mivel - ismét hivatkozva /4.4.3/-ra - $\forall\sigma\in Sec\,\xi$: $\underline{v}_z[\sigma^V(z)]=k_z^{-1}\circ C_z\circ\sigma^V(z)=k_z^{-1}[\sigma\circ\pi(z)]=\sigma^V(z)$, következik, hogy $\underline{v}\restriction VE=1$; ilymódon //13.1// $\underline{v}$ vertikális projektor és $C=k\circ\underline{v}$ folytán a megadott leképezés a hozzátartozó konnektor. ::

- Szem előtt tartva a lokális apparátussal kapcsolatban /3.3/-ban ill. speciálisan /3.3.1/-ben mondottakat, /10.4.4/ és /4.4.3/ alapján azonnal adódik a

<u>/13.4.2/ következmény</u> Legyen $H\ (N_i^\alpha)$ paraméterekkel rendelkező horizontális struktura a ξ vektornyalábon s tekintsük a $C^H := k \circ \pi^v$ konnektort. $\forall z \in E$,

$$a = a^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z + A^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z \in T_z E: \quad C^H(a) = \left(A^\alpha + a^i N_i^\alpha(z)\right) e_\alpha[\pi(z)]. \qquad ::$$

<u>/13.4.3/ megjegyzés</u> Konnektort - mégpedig lineáris konnektort - P. Dombrowski konstruált elsőként nevezetessé vált [Do] dolgozatában, egy sokaságon adott lineáris konnexióból /ld. majd: /16.3.5// kiindulva. A konnektorok jelentősége kettős: egyrészt csupán egy kicsiny lépés választja el őket a horizontális strukturákhoz csatolható differenciáloperátoroktól, másfelől - /13.4.1/ által motiválva! - a horizontális strukturák elméletének egy olyan alternativ fölépitése válik lehetségessé általuk, amely <u>Banach-sokaságok</u> esetén a talán legkényelmesebben járható utat jelenti. - Az elsőként érintett kérdést a 16.§-ban fogjuk részletesen diszkutálni, a második aspektussal - a végtelen-dimenziós általánositással - ebben a munkában nem foglalkozunk.

<u>14.§. Horizontális strukturák néhány további megadása. Összegzés.</u>

/14.1/ Alapulvéve a $\xi = (E, \pi, M)$ fibrált teret, ismét az $(\mathcal{A}J\xi, \tau_M^* \otimes V\xi)$ affin nyalábra //6.3.4// forditjuk figyelmünket. Emlékeztetünk rá //2.7//, hogy itt $\tau_M^* \otimes V\xi$ a τ_M^* és $V\xi$ vektornyaláb külső tenzori szorzata; totálterét - a /3.1/-ben követett gyakorlatnak megfelelően - $T^*M \otimes VE$ -vel jelöljük. - Egy $\mathcal{A}J\xi \longrightarrow \tau_M^* \otimes V\xi$ $\mathcal{A}B$ -morfizmust <u>jet-tranzlációnak</u> hivunk, ha csatolt VB -morfizmusa $\tau_M^* \otimes V\xi$ identitása. Ebben az alpontban a jet-tranzlációk és a horizontális strukturák kapcsolatát irjuk le, a horizontális strukturákat - /12.2.2/ szellemében - $\mathcal{A}J\xi$ globális metszeteivel reprezentálva.

/14.1.1/ lemma Legyen $\gamma \in Sec\, \mathcal{A}J\xi$. $\forall \sigma \in Sec\, \xi$, $x \in M$:
$j_x\sigma - \gamma[\sigma(x)] \in T_x^*M \otimes V_{\sigma(x)}E$, ahol a "-" jel affin értelemben //6.1// szerepel.

:: /6.3.4/ igazolásakor láttuk, hogy $j_x\sigma$ kanonikusan azonositható a $\theta(j_x\sigma) := T_x\sigma \in Hom(T_xM, T_{\sigma(x)}E)$ lineáris leképezéssel, γ pedig a /12.2.2/-ben mondottak szerint $\pi^*\tau_M \longrightarrow \tau_E$ horizontális leképezésnek tekinthető, amelyre igy teljesül a $T_{\sigma(x)}\pi \circ \gamma[\sigma(x)] = 1_{T_xM}$ reláció. Mivel $\theta(j_x\sigma)$ ugyancsak eleget tesz ennek az összefüggésnek //6.3.4//, következik, hogy $\forall v \in T_xM$: $(j_x\sigma - \gamma[\sigma(x)])(v) \equiv [\theta(j_x\sigma) - \gamma[\sigma(x)]](v) \in V_{\sigma(x)}E$, s ez kijelentésünk helyességét mutatja. ::

/14.1.2/ állitás Tekintsük az $\mathcal{A}J\xi = (JE, p, E)$ affin jet-nyalábot. Ha $\gamma \in Sec\, \mathcal{A}J\xi$, $c := 1_{JE} - \gamma \circ p$ és i az $E \hookrightarrow M \times E$ természetes inkluzió, akkor (c, i) jet-tranzláció, amelyet a γ -hoz /vagy az $Im\,\gamma$ horizontális strukturához/ tartozó jet-tranzlációnak mondunk. c és γ között fennáll a $c \circ \gamma = 0$ összefüggés.

:: /14.1.1/ biztositja, hogy $Im\, c \subset T^*M \otimes VE$, $c: JE \longrightarrow T^*M \otimes VE$ fibrumtartó volta pedig evidens. Mivel tetszőleges $j_x\sigma$, $j_x\tau \in (TE)_z$ $(z = \sigma(x) = \tau(x) = p(j_x\sigma) = p(j_x\tau))$ esetén

$c(j_x\sigma) - c(j_x\tau) = j_x\sigma - \gamma(z) - j_x\tau + \gamma(z) = j_x\sigma - j_x\tau$,

következik, hogy (c, i) valóban jet-tranzláció. Végül

$c \circ \gamma = \gamma - (\gamma \circ p) \circ \gamma = \gamma - \gamma \circ (p \circ \gamma) = \gamma - \gamma = 0$. ::

/14.1.3/ következmény Ha $\gamma \in Sec\, \mathcal{A}J\xi$ paraméterei az $N_i^\alpha := -y_i^\alpha \circ \gamma$ függvények /v.ö. /12.2.4//, ugy a hozzátartozó jet-tranzlációra $\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dy^\alpha\right) \circ c = y_i^\alpha + N_i^\alpha \circ p$ $((\alpha, i) \in \underline{r} \times \underline{n})$ teljesül. ::

/14.1.4/ állitás Minden $(c, i): \mathcal{A}J\xi \longrightarrow \tau_M^* \otimes V\xi$ jet-tranzlációhoz megadható egy és csak egy olyan $H: H\xi = Im\,\gamma$, $\gamma \in Sec\, \mathcal{A}J\xi$ horizontális struktura, hogy $c = 1 - \gamma \circ p$.

:: Affin morfizmusról lévén szó, $\forall j_x\sigma, j_x\tau \in (JE)_z$
$(z = p(j_x\sigma) = p(j_x\tau))$: $c(j_x\sigma) - c(j_x\tau) = j_x\sigma - j_x\tau$.

Ebből azonnal következik, hogy $c(\partial_x\sigma) = \partial_x\sigma - \gamma(z)$, ahol $\gamma(z) \in \mathrm{Hom}(T_xM, T_zE)$ és – $c(\partial_x\sigma) \in \mathrm{Hom}(T_xM, V_zE)$ folytán – $T_z\pi \circ \gamma(z) = 1_{T_xM}$. Ilymódon $\mathcal{A}J\xi$ -nek egy egyértelmüen definiált //6.1/ !/ $\gamma: E \longrightarrow JE$, $z \longmapsto \gamma(z)$ globális metszetéhez jutunk, amellyel automatikusan teljesül a $c = 1_{JE} - \gamma \circ p$ reláció. ::

/14.1.5/ következmény A ξ fibrált tér fölötti horizontális strukturák és az $\mathcal{A}J\xi \longrightarrow \tau^*_M \otimes V\xi$ jet-tranzlációk között a $H\xi \xrightarrow{(12.2.2)} \mathrm{Im}\,\gamma \longmapsto 1_{JE} - \gamma \circ p$ leképezés bijekció. ::

/14.2/ Alapvető jelentőségü enciklopédikus müvében J.Dieudonné egy igen jól motivált s több szempontból is eredeti tárgyalását adja a konnexióknak /[D], Vol. III, IV/. Ennek alapötletét ültetjük most át az általunk kiépitett keretek közé – konkrétan az affin jet-nyalábok kontextusába –, megjegyezve, hogy magát a "konnexió" terminust eltérő jelentésárnyalattal fogjuk bevezetni a 18.§-ban.

/14.2.1/ állitás Legyen $\xi = (E, \pi, M)$ fibrált tér. Ha $\gamma \in \mathrm{Sec}\,\mathcal{A}J\xi$, $e: JE \times_M TM \longrightarrow TE$, $(\partial_x\sigma, v) \longmapsto T_x\sigma(v)$ $(v \in T_xM)$ és

$$K := e \circ (\gamma \times 1_{TM}): \quad \begin{array}{ccc} E \times_M TM & \xrightarrow{\gamma \times 1_{TM}} & JE \times_M TM \\ \downarrow & \swarrow_{e} & \\ TE & & \end{array}$$

, akkor

/1/ $K \in \mathrm{Sec}\,\mathcal{A}\tau_E$, s igy $\forall (z,v) \in E \times_M TM$:

$T\pi \circ K(z,v) = v$, $\pi_E \circ K(z,v) = z$;

/2/ $\forall z \in E$: $K_z: T_{\pi(z)}M \longrightarrow T_zE$, $v \longmapsto K_z(v) := K(z,v)$ lineáris leképezés, vagyis $K \in \mathrm{Mor}_E(\pi^*\tau_M, \tau_E)$.

Megforditva: $\forall K \in \mathrm{Sec}\,\mathcal{A}\tau_E \cap \mathrm{Mor}_E(\pi^*\tau_M, \tau_E)$:

$\exists!\, \gamma \in \mathrm{Sec}\,\mathcal{A}J\xi$: $K = e \circ (\gamma \times 1_{TM})$.

:: $\forall (z,v) \in E \times_M TM$: $K(z,v) := e(\gamma(z), v) = \gamma(z)(v) \in T_zE$,

hiszen a /6.3.4/ igazolásakor látottak szerint $\gamma(z) \in \mathrm{Hom}(T_xM, T_zE)$ $(x = \pi(z))$. Ebből világos, hogy $K \in \mathrm{Sec}\,\mathcal{A}\tau_E$ s $\gamma(z)$ linearitása miatt a $K_z: v \longmapsto K(z,v)$ leképezés linearitása is automatikusan adódik. – Megforditva, $K \in \mathrm{Sec}\,\mathcal{A}J\xi \cap \mathrm{Mor}_E(\pi^*\tau_M, \tau_E)$ birtokában értelmezzük a $\gamma: z \in E \longmapsto \gamma(z) \in \mathrm{Hom}(T_{\pi(z)}M, T_zE)$ leképezést a $\gamma(z) := K_z$ előirással! $T_z\pi \circ K_z = 1_{T_{\pi(z)}M}$ folytán ekkor a /6.3.4/ bizonyitásában adott interpretációnak megfelelően $\gamma(z)\in(\mathcal{J}E)_z$; γ tehát globális metszete $\mathcal{A}\mathcal{J}\xi$ -nek. Könnyü ellenőrizni, hogy ez az <u>egyetlen</u> olyan metszet, amely eleget tesz a kivánalmaknak. ::

<u>/14.2.2/ következmény</u> A ξ fibrált tér fölötti horizontális strukturák és a $Sec\mathcal{A}\tau_E \cap Mor_E(\pi^*\tau_M, \tau_E)$ halmaz elemei között bijekciót ad meg a

$$H\xi \xrightarrow{(12.2.2)} \operatorname{Im}\gamma \longmapsto e\circ(\gamma\times 1_{TM})$$

leképezés. ::

/14.3/ Vegyük alapul továbbra is a $\xi=(E,\pi,M)$ fibrált teret. Egy $P:\tau_E\to\tau_E$ VB -endomorfizmust ξ fölötti <u>majdnem-szorzat strukturának</u> /m.sz.s./ nevezünk, ha $P^2=1_{\tau_E}$.

<u>/14.3.1/ állitás</u> Amennyiben H horizontális struktura ξ -n, ugy $P^H:=1-2p^V$ m.sz.s., amelyet H <u>által indukáltnak</u> mondunk. P^H -ra teljesülnek a következők:

/1/ Tetszőleges $z\in E$ esetén a $P^H_z:=P^H\restriction T_zE$ lineáris operátornak -1 és 1 egyaránt sajátértéke, előbbinek a V_zE, utóbbinak a H_zE sajátaltér felel meg.

/2/ Ha C^H a H -hoz tartozó konnektor //13.4.2//, akkor $C^H\circ P^H=-C^H$.

:: /10.2/ figyelembevételével $P^H\circ P^H=(1-2p^V)\circ(1-2p^V)=$ $=1-4p^V+4p^V\circ p^V=1$. Tetszőleges $a\in V_zE\setminus\{\sigma\}$ esetén $P^H(a)=a-2a=-a$, tehát a -1 sajátérték s minden nemzérő vertikális vektor ehhez tartozó sajátvektor. Megforditva, ha $P^H_z(a)=-a$, akkor $p^V(a)=\frac{1}{2}(a-P^H_z(a))=a$; vagyis ilyenkor "a" vertikális. Ugyanigy ellenőrizhető, hogy a $+1$ is sajátérték és P^H_z hozzátartozó sajátaltere a H_zE horizontális altér. Végül $C^H\circ P^H=(k\circ p^V)\circ(1-2p^V)=-k\circ p^V=-C^H$. ::

- Az állitásból kiolvashatóan a P^H m.sz.s. igen érzékletes geometriai jelentéssel bir: fibrumonként a $V_zE\oplus H_zE$ direkt fölbontásokhoz tartozó horizontális alterekre vonatkozó "tükrözéseket" irja le. Közvetlenül inspirál e kép /14.3.1/ következő "megforditására":

<u>/14.3.2/ állítás</u> Legyen $P \in \mathrm{Mor}_E(\tau_E, \tau_E)$ m.sz.s. s tegyük föl, hogy minden $z \in E$ esetén a $P_z := P \upharpoonright T_z E$ lineáris operátornak a $V_z E$ vertikális altér -1 sajátértékhez tartozó sajátaltere. Egyértelműen létezik ekkor olyan H horizontális struktura ξ -n, hogy $P = P^H$.

:: Ha $\underline{v} := \frac{1}{2}(1_{TE} - P)$, akkor $\underline{v} \in \mathrm{Mor}_E(\tau_E, \tau_E)$ s mivel $\forall\, a \in V_z E : \underline{v}(a) = \frac{1}{2}(a - (-a)) = a$, $\underline{v} \upharpoonright V\xi = 1$.

Tekintettel arra, hogy $\forall\, b \in T_z E : P[\underline{v}(b)] = \frac{1}{2}[P(b) - b] = -\underline{v}(b)$, következik $\mathrm{Im}\, \underline{v} = V\xi$ teljesülése is, $\underline{v}$ tehát vertikális projektor. /13.1.1/ alapján ez állításunk helyességét jelenti. ::

/14.4/ Fejezetünkben mindeddig elsősorban azt a kérdést jártuk körül, hogy miként írható le egy horizontális struktura, s hogy mi a kapcsolat a különböző megadási módok között. Számos - jól definiálható értelemben ekvivalens - módszert tárgyaltunk, ezek együttese rendkívül hajlékony apparátust ad kezünkbe az elmélet további aspektusainak kibontásához s a horizontális strukturák alkalmazásaihoz. Az elvégzett vizsgálatok tehát távolról sem l' art pour l' art jellegüek! - Lezárásaként e problémakörnek, tömören összefoglaljuk most az utóbbi négy §-nak a mondott szempontból legjellegzetesebb eredményeit.

<u>/14.4.1/ TÉTEL</u> Vegyük alapul a $\xi = (E, \pi, M)$ fibrált teret s legyen H tetszőleges horizontális struktura ξ -n.

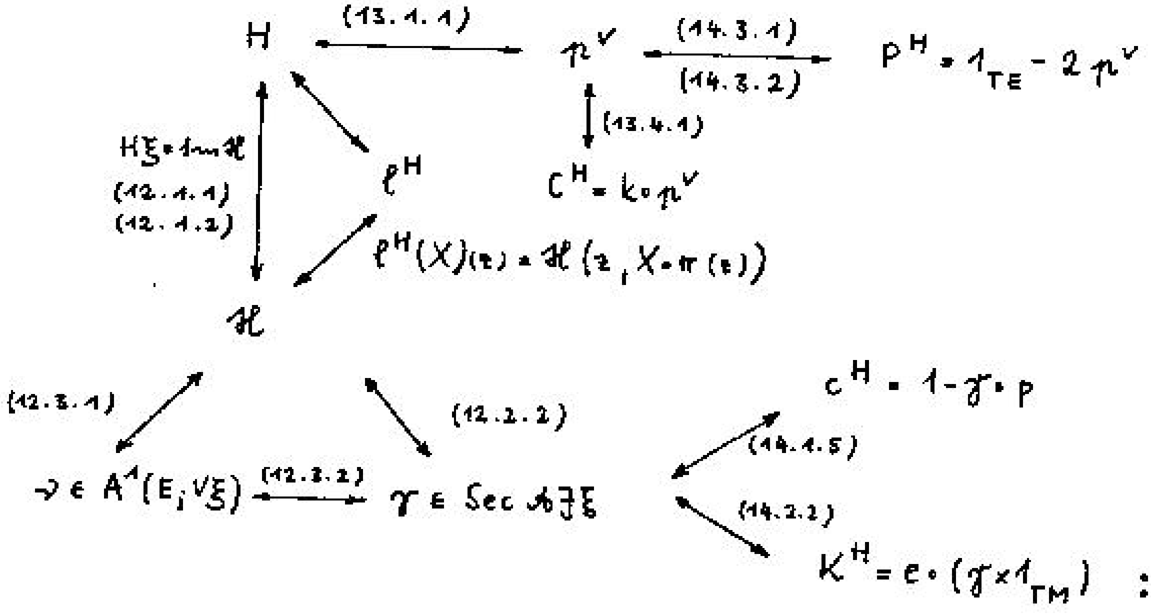
/i/ H -hoz egyértelműen létezik egy $\mathcal{H} : \pi^* \tau_M \longrightarrow \tau_E$ <u>horizontális leképezés</u> - az (S) kanonikus egzakt sor //12.1// egy /jobboldali/ hasítása - ugy, hogy $H\xi = \mathrm{Im}\, \mathcal{H}$. $\mathcal{H}$ az ℓ^H, $X \in \mathfrak{X}(M) \longmapsto \ell^H(X) \in \mathfrak{X}_H E$, $\ell^H(X)(z) := \mathcal{H}(z, X \circ \pi(z))$ előírás szerint <u>liftelő formát</u> származtat $/\ell^H \in A^1_P(M; \tau_E)$ és az $\overline{\ell^H}$ vetített forma $\mathfrak{X}^1_1(M)$ egységtenzora/.

A horizontális leképezések interpretálhatók az $\mathcal{A}J\xi$ affin jet-nyaláb - vagy konnexiónyaláb - <u>globális metszeteiként</u>. Minden ilyen $\mathcal{T} : E \longrightarrow J E$ metszet <u>jet-tranzlációt</u> indukál a $c := 1_{JE} - \mathcal{T} \circ p$ előírás szerint, $K := c \circ (\mathcal{T} \times 1_{TM})$ pedig olyan metszete $\mathcal{A}\tau_E$ -nek, amely egyben E -morfizmus $\pi^*\tau_M$ és τ_E között. - Megforditva, tetszőleges $\Gamma \in A^1_p(M;\tau_E)$ liftelő formához, $c: \mathcal{A}J\xi \longrightarrow \tau^*_M \otimes V\xi$ jet-tranzlációhoz és $K \in Sec\,\mathcal{A}\tau_E \cap$ $\cap\, Mor_E(\pi^*\tau_M,\tau_E)$ leképezéshez létezik pontosan egy, a jelzett módon ezeket származtató horizontális struktura; az utóbbiakhoz a $\gamma \in Sec\,\mathcal{A}J\xi$ metszetek közvetitésével, eleget téve a $c = 1_{JE} - \gamma \cdot p$, $K = e\circ(\gamma \times 1_{TM})$ karakterisztikus relációknak.

/ii/ A $\tau_E = H\xi \oplus V\xi$ direkt fölbontáshoz tartozó $\pi^V: \tau_E \longrightarrow \tau_E$ projekció <u>vertikális projektor</u>, azaz $Im\,\pi^V = V\xi$ és $\pi^V \restriction V\xi = 1$. π^V egy <u>vertikális leképezés</u>sel identifikálható, nevezetesen (S) -nek azzal a /jobboldali/ hasitásával, amely a H -hoz tartozó horizontális leképezés "komplementere".

$P^H := 1 - 2\pi^V$ <u>majdnem-szorzat struktura,</u> amely a vertikális vektorokat ellentettjeikbe viszi át, $\xi \in VB(M)$ esetén pedig a $C^H := k\circ\pi^V,\ TE \longrightarrow E$ leképezés - a H -hoz tartozó <u>konnektor</u> - π fölötti morfizmus és teljesiti a $C^H \circ \sigma^V = \sigma\circ\pi$ $(\sigma \in Sec\,\xi)$ relációt. - Megforditva, minden vertikális projektorhoz, továbbá a mondott tulajdonságu m.sz.s.-hoz és - a vektornyaláb esetben - $(C,\pi): \tau_E \longrightarrow \xi$ morfizmushoz létezik egy és csak egy, a leirtak szerint ezeket származtató horizontális struktura.

:: Megállapitásaink /sőt ezeknél valamivel több/ pl. az alábbi séma szerint olvashatók ki az eddigi eredményekből:



::

15.§. Homogenitási feltétel

/15.0/ megállapodás Ebben a §-ban végig föltesszük, hogy $\xi = (E, \sigma, M)$ n-dimenziós bázissokaság fölötti r -rangu vektornyaláb.

/15.1/ Mivel tetszőleges $\Omega \in A^1(E; \tau_E)$ forma interpretálható $(1,1)$ -tenzormezőként is //10.2.1//, szólhatunk Ω -nak a Liouville-vektormező szerinti Lie-deriváltjáról. Az 5.§-ban diszkutált homogenitás-koncepciót általánositva, Ω -t k -adrendben homogénnek $(k \in \mathbb{Z})$ nevezzük, ha $\mathcal{L}_Z \Omega = k\Omega$.

/15.2/ Tegyük föl, hogy H horizontális struktura ξ -n.

- Azt mondjuk, hogy H homogenitási feltételnek tesz eleget, ha a hozzátartozó vertikális projektor nulladrendben homogén a /15.1/ szerinti értelemben - vagyis ha $\mathcal{L}_Z p^V = 0$.

/15.2.1/ megjegyzés A H -ra vonatkozó homogenitási feltétel ekvivalens a hozzátartozó horizontális projektor- p^H - vagy majdnem-szorzat struktura- P^H - nulladrendü homogenitásával, hiszen $p^H := 1_{TE} - p^V$, $P^H = 1_{TE} - 2p^V$ és $\mathcal{L}_Z 1_{TE} = 0$.

/15.2.2/ állitás $\mathcal{L}_Z p^V = 0 \iff \forall t \in \mathbb{R} : p^V \circ T\delta_t = T\delta_t \circ p^V$.

:: $\mathcal{L}_Z p^V$ eltünése azt jelenti, hogy p^V -mint $(1,1)$ -tenzormező -- konstans a Z vektormező folyama mentén, azaz hogy $\forall t \in \mathbb{R} : p^V = \delta_t^* p^V$ / [PM], 2.2.21/, ahol $\delta_t^* p^V :=$ $= (T\delta_{-t}) p^V := (T\delta_{-t})_1^1 \circ p^V \circ \delta_{-t}$, itt pedig $(T\delta_{-t})_1^1$ a $T\delta_t$ érintőleképezés "$(1,1)$ -tenzorizáltja", amely a

$$(T\delta_{-t})_1^1 [p^V(\omega, X)] := p^V\left((T\delta_{-t})^* \omega, T\delta_t(X)\right) = (T\delta_{-t})^* \omega [p^V(T\delta_t(X))] =$$

$$= \omega [T\delta_{-t} \circ p^V \circ T\delta_t(X)]$$

összefüggés szerint hat /figyelembe véve az utolsó előtti lépésnél p^V $(1,1)$ -tenzormezőként és $\mathcal{X}(E) \to \mathcal{X}(E)$ leképezésként lehetséges interpretációjának kapcsolatát/. Igy tehát $\mathcal{L}_Z p^V = 0 \iff \forall \omega \in \mathcal{X}^* E$, $X \in \mathcal{X}(E)$, $t \in \mathbb{R}$: $(T\delta_{-t}) p^V(\omega, X) = \omega [T\delta_{-t} \circ p^V \circ T\delta_t(X)] = p^V(\omega, X) =$

$$= \omega(p^V(X)) \iff T\delta_{-t} \circ p^V \circ T\delta_t = p^V \iff p^V \circ T\delta_t = T\delta_t \circ p^V. \; ::$$

/15.2.3/ lemma Amennyiben a H horizontális struktura, paraméterei az N_i^α függvények $/(\alpha,i)\in \underline{r}\times\underline{n}$ /, ugy az $\mathcal{L}_Z \pi^V$ Lie-derivált koordinátaelőállitása a szokásos koordinátarendszerben //3.3// $\left(\frac{\partial N_i^\alpha}{\partial y^\beta} y^\beta - N_i^\alpha\right) dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$.

:: Közvetlenül ellenőrizhető, hogy a π^V vertikális projektor koordinátakifejezése $N_i^\alpha dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + dy^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$. Az első tag Lie-deriváltja

$$\mathcal{L}_Z\left(N_i^\alpha dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) = \mathcal{L}_Z\left(N_i^\alpha dx^i\right) \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + N_i^\alpha dx^i \otimes \mathcal{L}_Z \frac{\partial}{\partial y^\alpha} = \left(\frac{\partial N_i^\alpha}{\partial y^\beta} y^\beta dx^i + N_i^\alpha \mathcal{L}_Z dx^i\right) \otimes$$

$$\otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} - N_i^\alpha dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} = \left(\frac{\partial N_i^\alpha}{\partial y^\beta} y^\beta - N_i^\alpha\right) dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha},$$

a második tag Z szerinti Lie-deriválása pedig zérust eredményez. ::

/15.2.4/ lemma Ha létezik ξ -n olyan vektortérkép, amelyre vonatkozóan egy horizontális struktura paraméterei elsőrendben homogén függvények, ugy az illető horizontális struktura tetszőleges további vektortérképre vonatkozó paraméterei is ilyen tulajdonságuak.

:: Tekintsük ξ -n a $\left(\pi^{-1}(\mathcal{U}), (x^i), (y^\alpha)\right)$ és a $\left(\pi^{-1}(\bar{\mathcal{U}}), (\bar{x}^i), (\bar{y}^\alpha)\right)$ $(\mathcal{U} \cap \bar{\mathcal{U}} \neq \emptyset)$ vektortérképet //3.3//. Közvetlenül adódik /2.5/-ből, hogy - az ottani jelölések értelemszerü módositása mellett - a $g: x \in \mathcal{U} \cap \bar{\mathcal{U}} \longmapsto g(x) := \varphi_x \circ \bar{\varphi}_x^{-1}$ leképezés $GL(F)$ -be - ξ fibrumtipusának általános lineáris csoportjába - képez. Jelölje $\left(M_\beta^\alpha(x)\right)$ $g(x)$ matrixát F azon bázisára vonatkozóan, amelyet a /3.3/-beli meggondolás tüntet ki. Rutin számolással ellenőrizhető ekkor, hogy (y^α) és $(\bar{y}^\alpha)$ kapcsolata az

/1/ $$\bar{y}^\alpha = \left(M_\beta^\alpha \circ \pi\right) y^\beta \qquad (\alpha \in \underline{r})$$

összefüggéssel irható le. Amennyiben egy ξ fölötti horizontális struktura paraméterei a tekintett vektortérképekre vonatkozóan az N_i^α ill. $\bar{N}_i^\alpha$ $\left((i,\alpha) \in \underline{n} \times \underline{r}\right)$ függvények, ugy egy szintén egyszerü, de kissé hosszadalmas számolás a

/2/ $$\bar{N}_j^\alpha = \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j} \circ \pi\right)\left[\left(M_\beta^\alpha \circ \pi\right) N_i^\beta - \left(\frac{\partial M_\beta^\alpha}{\partial u^i} \circ \pi\right) y^\beta\right]$$

transzformációs formulához vezet. – Tegyük föl mármost az függvények elsőrendű homogenitását! /5.1.1/ értelmében ez azzal ekvivalens, hogy $\forall (i,\alpha) \in \underline{n} \times \underline{r}:\ \frac{\partial N_i^\alpha}{\partial y^\beta} y^\beta = N_i^\alpha$. /2/-ből deriválással

$$\frac{\partial \bar{N}_j^\alpha}{\partial \bar{y}^\varkappa} = \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j}\circ\pi\right)\left[\left(M_\beta^\alpha\circ\pi\right)\frac{\partial N_i^\beta}{\partial y^\gamma}\frac{\partial y^\gamma}{\partial \bar{y}^\varkappa} - \left(\frac{\partial M_\beta^\alpha}{\partial u^i}\circ\pi\right)\frac{\partial y^\beta}{\partial \bar{y}^\varkappa}\right],$$

innen pedig – az /1/-ből adódó $\frac{\partial y^\varkappa}{\partial \bar{y}^\lambda}\bar{y}^\lambda = y^\varkappa$ reláció, az N_i^α -n homogenitása és /2/ alapján –

$$\frac{\partial \bar{N}_j^\alpha}{\partial \bar{y}^\varkappa}\bar{y}^\varkappa = \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j}\circ\pi\right)\left[\left(M_\beta^\alpha\circ\pi\right)\frac{\partial N_i^\beta}{\partial y^\gamma}y^\gamma - \left(\frac{\partial M_\beta^\alpha}{\partial u^i}\circ\pi\right)y^\beta\right] = \bar{N}_j^\alpha$$

– s /5.1.1/-re tekintettel ez éppen az állítás. ::

<u>/15.2.5/ állítás</u> Egy horizontális struktura pontosan akkor tesz eleget a homogenitási feltételnek, ha van olyan vektortérkép, amelyre vonatkozó paraméterei fibrumonként lineáris függvények.

:: /15.2.3/-ból és /5.1.2/-ből /Dombrowski-észrevétel/ következik, hogy homogenitási feltételt teljesítő horizontális struktura paraméterei a mondott tulajdonságúak. – Megfordítva, ha vannak fibrumonként lineáris paraméterek, akkor /5.1.1/ és /15.2.3/ <u>lokálisan</u> garantálja a homogenitási feltétel teljesülését, /15.2.4/ pedig maga után vonja e "lokális homogenitás" globális jellegét. ::

/15.3/ Kiegészítjük s egy /14.4.1/ mintájára megfogalmazott tételben összegezzük a homogenitási feltétellel kapcsolatos eredményeinket. Ennek érdekében – s eddigi módszerünk szellemében – hasznos lesz néhány további, előkészítő észrevételt tenni.

<u>/15.3.1/ lemma</u> Legyen $\left(\pi^{-1}(\mathcal{U}); (x^i), (y^\alpha)\right)$ vektortérkép ξ -n. A $\delta_t : E \longrightarrow E,\ z \longmapsto tz$ dilatációk hatását lokális koordinátákban a $T_z\delta_t\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{tz}$, $T_z\delta_t\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z = t\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{tz}$ $\left(z \in \pi^{-1}(\mathcal{U}),\ (\alpha,i) \in \underline{r} \times \underline{n}\right)$ relációk jellemzik. ::

<u>/15.3.2/ lemma</u> A kanonikus leképezés //4.2// és a δ_t dilatációk között érvényes a $\delta_t \circ k = k \circ (T\delta_t \restriction VE)$ "fölcserélési formula".

:: A

$$\begin{tikzcd}
\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z \in V_z E \arrow[r, mapsto, "k", "(3.3.2),(4.2)"'] \arrow[d, "T_z \delta_t"', "(15.3.1)"] & e_\alpha(x) \arrow[d, "\delta_t"] \\
\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{tz} \in V_{tz} E \arrow[r, mapsto, "k"'] & t e_\alpha(x)
\end{tikzcd}$$

$(\alpha \in \underline{n},\ x = \pi(z) = \pi(tz))$ diagram kommutativitása igazolja kijelentésünket. ::

<u>/15.3.3/ állitás</u> Legyen H horizontális struktura a ξ vektornyalábon. - A H -hoz tartozó C^H konnektor pontosan akkor lineáris konnektor, ha $\forall t \in \mathbb{R} : C^H \circ T\delta_t = \delta_t \circ C^H$.

:: Jegyezzük meg először is, hogy a /13.4/-beli értelmezés egy közvetlen átfogalmazása szerint C^H <u>lineáris konnektor</u> volta a " $\forall v \in T_x M : C^H \restriction (TE)_v : (TE)_v \longrightarrow E_x$ lineáris leképezés" feltétellel ekvivalens. Amennyiben $a = T_x\sigma(v) \in (TE)_v$ $/\sigma \in Sec\,\xi$, v.ö. /3.4.2//, ugy /15.3.1/ és /3.4.3/ figyelembevételével $T\delta_t(a) = ta$, ahol a jobboldalon a $T\xi$ -beli értelemben vett skalárszoros szerepel. Ha mármost C^H lineáris konnektor, akkor $\forall a = T_x\sigma(v) \in (TE)_v : C^H \circ T\delta_t(a) = C^H(ta) = t\,C^H(a) = \delta_t \circ C^H(a)$, ahonnan $C^H \circ T\delta_t = \delta_t \circ C^H$ következik. Megforditva, ez utóbbi feltétel teljesülése esetén C^H a $T\xi$ tangens fibrálás fibrumain homogén leképezés, amiből a Dombrowski-észrevétel //5.1.2// alapján a kivánt linearitás adódik. ::

<u>/15.3.4/ tétel</u> Legyen H horizontális struktura a ξ vektornyalábon; tekintsük a hozzátartozó ℓ^H liftelő formát, p^V vertikális projektort, C^H konnektort, $\mathcal{H}$ horizontális leképezést s jelentse γ $\mathcal{A}\mathcal{J}\xi$ -nek azt a metszetét, amely $\mathcal{H}$ -val azonositható. - A következő kijelentések ekvivalensek:

/1/ H teljesiti a homogenitási feltételt.

/2/ $\mathcal{L}_2 \circ \ell^H = 0$.

/3/ $\forall t \in \mathbb{R} : p^V \circ T\delta_t = T\delta_t \circ p^V$.

/4/ p^V lineáris $T\xi$ fibrumain.

/5/ C^H lineáris konnektor.

/6/ $\forall t \in \mathbb{R} : \mathcal{H} \circ \tilde{\delta}_t = T\delta_t \circ \mathcal{H}$ ahol, $\tilde{\delta}_t : E \times_M TM \longrightarrow E \times_M TM, (z, v) \longmapsto (tz, v)$.

/7/ γ VB -morfizmus ξ és $\mathcal{J}\xi$ között.

/8/ Ha $K^H := e\cdot(\gamma \times 1_{TM})$ //14.2.1//, akkor tetszőlegesen rögzített $v \in T_xM$ mellett a $K^H_v : z \in E_x \longmapsto K^H_v(z) := K^H(z, v)$ leképezés lineáris leképezés $(TE)_v$ -be.

/9/ $c^H := 1 - \gamma \circ p$ //14.1.2// M -morfizmusa a $\mathcal{J}\xi$ vektornyalábnak önmagába.

/10/ $T\gamma \circ Z = {}^1Z \circ \gamma$ ahol ${}^1Z$ a Liouville-vektormező 1 -jet prolongációja //7.4//.

/11/ H-nak egy vektortérképre vonatkozó paraméterei fibrumonként lineáris függvények.

∴ A következő séma szerint okoskodunk:

$$\begin{tikzcd}
 & (2) \arrow[d, Leftrightarrow] & (4) \arrow[d, Leftrightarrow] & & (8) \arrow[d, Leftrightarrow] \\
 & (1) \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & (3) \arrow[r, Leftrightarrow] & (6) \arrow[r, Leftrightarrow] & (7) \arrow[d, Leftrightarrow] \\
(10) \arrow[r, Leftrightarrow] & (11) & (5) \arrow[u, Rightarrow] & & (9)
\end{tikzcd}$$

$(1) \Leftrightarrow (3)$ és $(1) \Leftrightarrow (11)$ teljesülését már igazoltuk //15.2.2/ és /15.2.5//.

/a/ Megmutatjuk, hogy $\underline{(1) \Leftrightarrow (2)}$. – A tenzorderivációkra vonatkozó szorzat-szabály / [O'N], p.44/ szerint $\forall \omega \in \mathcal{X}^*(E), X \in \mathcal{X}(M)$:

$$\mathcal{L}_Z \left(\pi^H(\theta, X^H)\right) = \left(\mathcal{L}_Z \pi^H\right)(\theta, X^H) + \pi^H\left(\mathcal{L}_Z \theta, X^H\right) + \pi^H\left(\theta, \mathcal{L}_Z X^H\right).$$

π^H -t alkalmas módon interpretálva s figyelembevéve a $HX^H = X^H$ relációt,

$$\mathcal{L}_Z(\theta X^H) = \theta\left((\mathcal{L}_Z \pi^H) X^H\right) + \mathcal{L}_Z \theta(X^H) + \theta\left(\pi^H(\mathcal{L}_Z X^H)\right)$$

irható. Mivel X^H vetithető vektormező, /5.4.1/ értelmében $\mathcal{L}_Z X^H = [Z, X^H] \in \mathcal{X}_V E$, s igy a jobboldali utolsó tag eltünik. A baloldalon ismételten alkalmazva a szorzatszabályt s élve az adódó törlési lehetőséggel, kapjuk:

$$\theta(\mathcal{L}_Z X^H) = \theta\left[(\mathcal{L}_Z \pi^H) X^H\right]$$ ill. – θ tetszőlegessége

folytán $\mathcal{L}_Z X^H = (\mathcal{L}_Z \pi^H) X^H$. Ha ármost /1/ teljesül, akkor – /15.2.1/-re tekintettel – $\mathcal{L}_Z \pi^H = 0$ s ezért a baloldal is eltünik; fennáll tehát /2/. Megforditva, /2/ teljesülése esetén a nyert eredmény azt jelenti, hogy $\forall X \in \mathcal{X}(M): (\mathcal{L}_Z \pi^H) X^H = \sigma$. Mivel – mint az a most vázolthoz hasonló számolással látható – $\forall Y \in \mathcal{X}(E): (\mathcal{L}_Z \pi^H) VY = 0$, következik, hogy az $\mathcal{L}_Z \pi^H$ tenzormező – s ennek folytán

$\mathcal{L}_z \pi^V$ is - <u>pontonként</u> eltűnik, amivel $(2) \Rightarrow (1)$ igazolást nyert.

/b/ <u>$(3) \Leftrightarrow (4)$</u> Ez közvetlenül adódik a /15.3.3/ igazolásakor tett egyik észrevételből: a skalárral való szorzás $T\xi$ -beli szabálya szerint $\forall\ a = T_x\sigma(v) \in (TE)_v$ $(x \in M, v \in T_xM,$ $\sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi)$: $\pi^V(T\delta_t(a)) = \pi^V(ta)$, ill. $t\pi^V(a) = T\delta_t(\pi^V(a))$.

/c/ <u>$(3) \Leftrightarrow (5)$</u> Alkalmazva a /3/-beli összefüggés mindkét oldalára a kanonikus leképezést, a $k \circ \pi^V \circ T\delta_t = k \circ T\delta_t \circ \pi^V$ relációhoz jutunk, amiből /15.3.2/ figyelembevételével $C^H \circ T\delta_t = \delta_t \circ C^H$ következik; tehát $(3) \Rightarrow (5)$. Megforditva, ha C^H lineáris konnektor, ugy /15.3.3/ értelmében $\forall t \in \mathbb{R}: C^H \circ T\delta_t = \delta_t \circ C^H$, azaz - ismételten tekintettel /15.3.2/-re - $k \circ \pi^V \circ T\delta_t = \delta_t \circ k \circ \pi^V = k \circ T\delta_t \circ \pi^V$. Mivel k fibrumonként izomorfizmus, innen /3/-at kapjuk.

/d/ <u>$(3) \Leftrightarrow (6)$</u> Közvetlenül látható, hogy $\forall a \in T_zE: \mathcal{H}_z(T\pi(a)) := \mathcal{H}(z, T\pi(a)) = \pi^H_z(a)$. /v.ö. /13.1.1//. Igy /3/ teljesülése esetén //15.2.1/ miatt/ $T\delta_t \circ \mathcal{H}_z(T\pi(a)) = T\delta_t \circ \pi^H_z(a) = \pi^H_{tz} \circ T\delta_t(a) = \mathcal{H}_{tz}[T\pi(T\delta_t(a))] = \mathcal{H}_{tz}(T\pi(a)) = \mathcal{H}(tz, T\pi(a)) = \mathcal{H} \circ \tilde{\delta}_t(z, T\pi(a))$, vagyis $(3) \Rightarrow (6)$, sőt meggondolásunkból a forditott implikáció is kiolvasható.

/e/ <u>$(6) \Leftrightarrow (7)$</u> /6/ ugy fogalmazható át, hogy $\forall t \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi$: $T\delta_t \circ \mathcal{H}_{\sigma(x)} = \mathcal{H}_{t[\sigma(x)]} \equiv \mathcal{H}_{(t\sigma)(x)}$. Itt $\mathcal{H}_{\sigma(x)}$ a /12.2.4/ igazolásakor jelzett módon egy $j_x\sigma$ -jettel, $\mathcal{H}_{(t\sigma)(x)}$ pedig <u>/6/ teljesülésekor</u> a $j_x(t\sigma)$ 1-jettel azonositható, ez ugyanis éppen a $v \in T_xM \longmapsto T(t\sigma)(v) = T(\delta_t \circ \sigma)(v) = T\delta_t \circ T\sigma(v) \equiv T\delta_t \circ \mathcal{H}_{\sigma(x)}(v)$ lineáris leképezésként interpretálható. Ilymódon /6/ fennállása esetén $\forall t \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi$: $\gamma(t\sigma(x)) = t\gamma(\sigma(x))$ /hiszen $j_x(t\sigma) := t j_x\sigma$ /, amiből következik //15.1.2//, hogy $\gamma: E \longrightarrow JE$ fibrumonként lineáris. A megforditás hasonlóan látható.

/f/ A $K^H_v(\sigma(x)) = e(\gamma(\sigma(x)), v) = \gamma(\sigma(x))(v)$ ill. $C^H(j_x\sigma) = j_x\sigma - \gamma[\sigma(x)]$ $(\sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi)$ formulákból mind a <u>$(7) \Leftrightarrow (8)$</u>, mind a <u>$(7) \Leftrightarrow (9)$</u> ekvivalencia azonnal kiolvasható.

/g/ Belátjuk végül, hogy <u>$(10) \Leftrightarrow (11)$</u>. - Amennyiben H paraméterei egy vektortérképre vonatkozóan az $N^\alpha_i: \pi^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$((i,\alpha)\in \underline{n}\times\underline{r})$ függvények, ugy //12.2.4// $y_i^\alpha\circ\gamma = -N_i^\alpha$.
Rutin száролással adódik ekkor, hogy $\forall z\in \pi^{-1}(\mathcal{U})$:

$$T_z\gamma\,[Z(z)] = T_z\gamma\left[y^\alpha(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z\right] = y^\beta(z)\left[\left(\frac{\partial}{\partial \check{y}^\beta}\right)_{\gamma(z)} - \frac{\partial N_i^\alpha}{\partial y^\beta}(z)\left(\frac{\partial}{\partial y_i^\alpha}\right)_z\right],$$

míg – /7.4.2/ hasznositásával –

$${}^1Z(\gamma(z)) = \check{y}^\alpha(\gamma(z))\left(\frac{\partial}{\partial \check{y}^\alpha}\right)_{\gamma(z)} + y_i^\alpha\circ\gamma(z)\left(\frac{\partial}{\partial y_i^\alpha}\right)_{\gamma(z)} = y^\alpha(z)\left(\frac{\partial}{\partial \check{y}^\alpha}\right)_z - N_i^\alpha(z)\left(\frac{\partial}{\partial y_i^\alpha}\right)_{\gamma(z)},$$

tehát $T\gamma\circ Z = {}^1Z\circ\gamma \iff \forall (i,\alpha)\in\underline{n}\times\underline{r}:\ N_i^\alpha = \frac{\partial N_i^\alpha}{\partial y^\beta}y^\beta \iff (11)$. ::

<u>/15.3.5/ megjegyzés</u> Az alkalmazott séma szerinti okoskodás természetesen csupán csak egyike a tétel bizonyítására kínálkozó számos lehetőségnek. Kézenfekvő, gyors, de sokkal kevesebb tanulsággal járó módszer lett volna pl. annak "by brute force" megmutatása, hogy /1/-/10/ mindegyike ekvivalens /11/-gyel. – A homogenitási feltételt további analizisnek is alá fogjuk vetni. A következő §-ban a differenciáloperátorok /9.5/-ben vázolt linearizálásával hozzuk kapcsolatba, a záró §-ban pedig Finsler-tipusu konnexiók nyelvén interpretáljuk.

16.§. Horizontális strukturához csatolt differenciáloperátorok

/16.1/ Eddigi gyakorlatunknak megfelelően e § meggondolásait is a $\xi = (E,\pi,M)$ fibrált tér alapulvételével végezzük, esetenként föltételezve, hogy $\xi\in VB(M)$. ξ –n rögzitünk egy H horizontális strukturát s ennek segitségével két – közös tőről fakadó – differenciáloperátort – pontosabban differenciáloperátor-családot – konstruálunk. Az első adott $\sigma\in Sec\,\xi$ metszet mellett $\mathcal{X}(M)\times Sec\,\tau_M$ -et képezi le $Sec(\sigma^* V\xi)$ -be, a minket igazán érdeklő második pedig egy $X\in\mathcal{X}(M)$ vektormező rögzitése után szolgáltat leképezést $Sec\,\xi$ -ből $Sec(\sigma^* V\xi)$ -be. A szövegkörnyezetből mindig kiderülő σ általi pull-back explicit föltüntetésétől a továbbiakban eltekintünk s egyöntetüen a $V_M\xi$ fibrált teret //9.4// szerepeltetjük. – Kiindulópontunk a részben /9.4.3/, /9.4.6/ és /9.5.2/ korolláriumaként származó

/16.1.1/ TÉTEL /i/ Ha $X \in \mathcal{X}(M)$ adott, a $\sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi \longmapsto \mathcal{L}_{-X^H}\sigma = T\sigma \cdot X - X^H \cdot \sigma$ leképezés vertikálisan prolongált differenciáloperátor, amelynek hatását lokálisan – a szokásos $(V; (x^i), (y^\alpha))$ adaptált térképet //3.3// használva – az $\mathcal{L}_{-X^H}\sigma = (X^i \cdot \sigma)\left[\left(\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial u^i} \cdot \sigma + N_i^\alpha\right)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right] \cdot \sigma$ formula írja le, ahol $X \restriction \sigma(V) = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, $\sigma^\alpha = y^\alpha \cdot \sigma$ s az N_i^α függvények H paraméterei $(i \in \underline{n}, \alpha \in \underline{r})$. Amennyiben $\sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi$ rögzített, az $X \in \mathcal{X}(M) \longmapsto \mathcal{L}_{-X^H}\sigma$ hozzárendelés nulladrendű, lineáris differenciáloperátort szolgáltat. /ii/ Tegyük föl, hogy $\xi \in VB(M)$. Ebben az esetben az $\mathcal{L}_{-X^H}$ differenciáloperátor <u>kvázi-skalár</u> – és megfordítva: ha adva van egy olyan $X \in \mathcal{X}(M) \longmapsto \mathcal{D}_X \in \mathcal{DO}(\xi, V_M\xi)$ leképezés, ahol $\mathcal{D}_X$ kvázi-skalár s projekciója M -en X, úgy létezik pontosan egy H horizontális struktura ξ -n, amelyre nézve $\forall\, X \in \mathcal{X}(M)$: $\mathcal{L}_{-X^H} = \mathcal{D}_X$.

:: A fenti hivatkozások után /i/-vel kapcsolatban elég ennyit megjegyezni, hogy $\forall f \in C^\infty(M)$: $(fX)^H = (f \cdot \sigma)X^H$ s ezért $\mathcal{L}_{-(fX)^H}\sigma = (f \cdot \sigma)(T\sigma \cdot X - X^H \cdot \sigma)$; utalni továbbá $C^\infty(M)$ $C^\infty(E)$ -be való természetes befoglalására /ld. pl. /4.3.2//. – /ii/-ből a megfordítás szorul igazolásra. Értelmezzük ebből a célból a $\Gamma: X \in \mathcal{X}(M) \longmapsto \Gamma(X) \in \mathcal{X}(E)$ leképezést a „$\forall \sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi$, $x \in M$: $\Gamma(X)(\sigma(x)) := T_x\sigma[X(x)] - \mathcal{D}_X\sigma(x)$" előírással! Ekkor $T_{\sigma(x)}\Gamma(\sigma(x)) = X(x)$, hiszen $\mathcal{D}_X\sigma(x) \in V_{\sigma(x)}E$; következésképpen Γ liftelő forma //11.2//, s mint ilyen, horizontális strukturát származtat. E horizontális struktura automatikusan eleget tesz az $\mathcal{L}_{-X^H} = \mathcal{D}_X$ kívánalomnak és egyértelműen meghatározott volta is közvetlenül látható. ::

/16.1.2/ következmény Tegyük föl, hogy $\xi \in VB(M)$. /i/ Ha $X \in \mathcal{X}(M)$ és $\nabla_X: \mathrm{Sec}\,\xi \longrightarrow \mathrm{Sec}\,\xi$, $\sigma \longmapsto \nabla_X\sigma := \tilde{\mathcal{L}}_{-X^H}\sigma := k \cdot \mathcal{L}_{-X^H}\sigma$, akkor $\nabla_X \in \mathcal{DO}(\xi, \xi)$. Ezt a differenciáloperátort az X vektormező szerinti <u>prekovariáns deriválásnak</u>, $\sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi$ -ben fölvett értékét az illető metszet X szerinti prekovariáns deriváltjának hívjuk. Lokálisan – a szokásos vektortérképet //3.3// használva – $\nabla_X\sigma = X^i\left(\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial u^i} + N_i^\alpha \cdot \sigma\right)e_\alpha$.

/ii/ Egyértelműen létezik olyan $\nabla: \mathrm{Sec}\,\xi \longrightarrow A^1(M;\xi)$ leképezés, hogy $\forall\, X \in \mathcal{X}(M)$: $\nabla_X = i(X) \cdot \nabla$ $/\, i(X): A^1(M;\xi) \longrightarrow \mathrm{Sec}\,\xi$

az X -szel való helyettesités - szubsztitució operátora, ld. pl. GHV , II. p.306./; ∇ -t az alapulvett horizontális strukturához tartozó prekonnexiónak nevezzük.

:: Már csak a prekonnexióval kapcsolatban mondottakhoz szükséges némi kommentár. - A prekovariáns deriválás segitségével értelmezhető a $\nabla : \sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi \longmapsto \nabla\sigma \in A^1(M;\xi)$ leképezés a „$\forall x \in M$: $(\nabla\sigma)_x : T_x M \longrightarrow E_x$, $X(x) \longmapsto (\nabla\sigma)_x X(x) := (\nabla_X \sigma)(x)$ $(X \in \mathfrak{X}(M))$" előirás szerint. Ekkor - /16.1.1/ miatt - $(\nabla\sigma)_x \in \mathrm{Hom}(T_x M, E_x)$ valóban fennáll, az $i(X).\nabla = \nabla_X$ reláció pedig automatikusan teljesül. Világos végül, hogy az utóbbi kivánalomnak csakis az imént definiált ∇ leképezés felel meg. ::

/16.2/ Horizontális struktura megadására ill. adott horizontális struktura leirására /14.4.1/ bő eszköztárat bocsát rendelkezésünkre. Ennek köszönhetően az $\mathcal{L}_{-X^H}$ differenciáloperátor ill. a prekovariáns deriválás és a prekonnexió bevezetésére sem a /16.1/-ben vázolt ut az egyedül járható; az érdekesebb s fontosabb alternativ megközelitési módok közül jelez néhányat a

<u>/16.2.1/ állitás</u> Amennyiben a H horizontális strukturához tartozó vertikális projekció, jet-tranzláció és konnektor rendre π^V, c^H és C^H /utóbbiról $\xi \in VB(M)$ hallgatólagos föltételezése mellett szólva/, ugy $\forall \sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi$, $X \in \mathfrak{X}(M)$:

/i/ $\mathcal{L}_{-X^H}\sigma = \pi^V \circ T\sigma \circ X$; /ii/ $\mathcal{L}_{-X^H}\sigma(x) = [c^H \circ j\sigma(x)]X(x)$ / $x \in M$ tetsz./; /iii/ $\nabla_X\sigma = C^H \circ T\sigma \circ X$, $\nabla\sigma = C^H \circ T\sigma$.

:: /i/ Segitségül véve a H-hoz tartozó $\mathcal{H}$ horizontális leképezést s a /13.1.1/-ben tett észrevételeket, tetszőleges $x \in M$ pontban $X^H(\sigma(x)) = \mathcal{H}(\sigma(x), X(x)) = \mathcal{H}(\sigma(x), T\sigma[T\sigma(X(x))]) = T\sigma(X(x)) - \pi^V[T\sigma(X(x))] = \pi^H(T\sigma(X(x)))$ s igy $X^H \circ \sigma = \pi^H \circ T\sigma \circ X$, következőleg $\pi^V \circ T\sigma \circ X = (1 - \pi^H) \circ T\sigma \circ X = T\sigma \circ X - X^H \circ \sigma = \mathcal{L}_{-X^H}\sigma$.

/ii/ Tekintsük az $\mathcal{A}\rceil\xi$ konnexiónyaláb azon γ metszetét, melyre $\mathrm{Im}\,\gamma = H = \mathrm{Im}\,\mathcal{H}$ /ld. /14.4.1/ bizonyitási sémáját!/. Ekkor //14.1.2// $c^H \circ j\sigma = (1_{JE} - \gamma \circ \pi) \circ j\sigma = j\sigma - \gamma \circ \sigma$, s igy - a /6.3.4/ és /12.2.4/ bizonyitásában végzett megfigyelések hasznositásával - $\forall x \in M$: $c^H \circ j\sigma(x) = j_x\sigma - \gamma[\sigma(x)] = T_x\sigma - \mathcal{H}_{\sigma(x)}$.

Ez az állitott összefüggés helyességét jelenti, hiszen az imént láttuk, hogy $\mathcal{H}_{\sigma(x)}[X(x)] = X^H(\sigma(x))$. /iii/ közvetlen korolláriuma /i/-nek és /16.1.2/-nek. ::

<u>/16.2.2/ megjegyzés</u> Érvelésünkből az is kiderül, hogy miként adható meg $\mathcal{L}_{-X^H}$ ill. ∇_X közvetlenül a H -hoz tartozó horizontális leképezés - vagy a $\mathcal{T}: E \longrightarrow \mathcal{J}E$ globális metszet - segitségével.

/16.3/ Érdekes és fontos kapcsolatot állapitunk meg a /11.3.1/-ben bevezetett $(X, \sigma) \longmapsto [X^H, \sigma^v]$ leképezés, a differenciáloperátorok /9.5/-ben tárgyalt linearizálása és az alapulvett horizontális strukturához csatolt differenciáloperátor/ok/ között. Észrevételeink eredményeként ujabb módot találunk arra, hogy a homogenitási feltétel //15.2// jelentését további árnyalatokkal gazdagitsuk.

<u>/16.3.1/ TÉTEL</u> Tegyük föl, hogy $\xi \in VB(M)$ s tekintsük a ∇_X differenciáloperátort. Egy $\sigma \in Sec\,\xi$ metszet rögzitése után képezzük az $s: \mathbb{R} \times M \longrightarrow E$, $(t, x) \longmapsto s(t,x) = s_t(x) := e^t\sigma(x)$ leképezést. Ekkor $s_0 = \sigma$, $\partial s = Z \circ \sigma$ és (v.ö. (9.5))

$$\partial(\nabla_X s) = [X^H, \sigma^v] \circ \sigma .$$

:: Alapulvéve a $(\pi^{-1}(\mathcal{U}), (x^i), (y^\alpha))$ vektortérképet s áttérve a megfelelő koordinátakifejezésekre, direkt számolással igazoljuk állitásainkat. /3.4.1/-re tekintettel, a $\partial s = Z \circ \sigma$ reláció ekkor azonnal adódik. /16.1.2/ értelmében $\forall t \in \mathbb{R}$: $\nabla_X s_t = X^i\Big(e^t \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial u^i} + N_i^\alpha \circ e^t\sigma\Big)e_\alpha$, igy $\big(t \in \mathbb{R} \longmapsto (\nabla_X s_t)(x)\big)'(0) = X^i(x)\Big(\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial u^i}(x) + \frac{\partial N_i^\alpha}{\partial y^\beta}(\sigma(x))\sigma^\beta(x)\Big) \cdot \Big(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\Big)_{\sigma(x)}$, ahonnan $\partial \nabla_X s = \Big[(X^i \circ \pi)\Big(\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial u^i} \circ \pi + \frac{\partial N_i^\alpha}{\partial y^\beta} y^\beta\Big)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\Big] \circ \sigma$.

Másrészt $[X^H, \sigma^v] \restriction \pi^{-1}(\mathcal{U}) = \Big[(X^i \circ \pi)\Big(\frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^\alpha\Big)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, (\sigma^\beta \circ \pi)\frac{\partial}{\partial y^\beta}\Big] =$

$= (X^i \circ \pi)\Big(\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial u^i} \circ \pi + \frac{\partial N_i^\alpha}{\partial y^\beta}(y^\beta \circ \sigma \circ \pi)\Big)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}$; ha ezt az iménti eredménnyel összevetjük, $\partial(\nabla_X s) = [X^H, \sigma^v] \circ \sigma$ teljesülése máris látható. ::

<u>/16.3.2/ következmény</u> A $\xi \in VB(M)$ vektornyalábon adott H horizontális struktura pontosan akkor tesz eleget a homogenitási feltételnek, ha a csatolt prekonnexióra $\forall\ X \in \mathcal{X}(M)$, $\sigma \in Sec\,\xi$: $(\nabla_X \sigma)^v = [X^H, \sigma^v]$.

:: /16.1.2/-ből /4.4.3/ alapján $(\nabla_X \sigma)^v \restriction \pi^{-1}(\mathcal{U}) =$
$= (X^i \circ \pi)\left(\frac{\partial \sigma^\kappa}{\partial u^i} \circ \pi + (N_i^\kappa \circ \sigma) \circ \pi\right)\frac{\partial}{\partial y^\kappa}$. Ha ezt összevetjük $[X^H, \sigma^v]$ imént levezetett koordinátakifejezésével, tüstént kapjuk, hogy $\left(\forall X \in \mathfrak{X}(M), \sigma \in Sec\,\xi : (\nabla_X \sigma)^v = [X^H, \sigma^v]\right) \Longleftrightarrow \forall (\alpha, i) \in \underline{r} \times \underline{n} : N_i^\alpha = \frac{\partial N_i^\alpha}{\partial y^\beta} y^\beta$, ami /15.3.4//1/$\Leftrightarrow$/11/ és a Dombrowski-észrevétel //5.1.2// értelmében állításunk helyességét jelenti. ::

<u>/16.3.3/ megjegyzés</u> A Tétel és a /9.5/-beli konstrukció figyelembevételével - kissé pontatlanul, de mégis találóan - eredményünk ugy is megfogalmazható, hogy <u>egy horizontális struktura pontosan akkor teljesiti a homogenitási feltételt, ha csatolt differenciáloperátorai - a prekovariáns deriválások - megegyeznek a linearizáltjukkal</u>.

<u>/16.3.4/ következmény</u> A H horizontális strukturára vonatkozó homogenitási feltétel azzal /is/ egyenértékü, hogy a H -hoz tartozó prekovariáns deriválások "derivációi" $Sec\,\xi$ -nek, azaz, hogy $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$, $\sigma \in Sec\,\xi$:
$\nabla_X f\sigma = (Xf)\sigma + f\nabla_X \sigma$.

:: A homogenitási feltétel teljesülése esetén /16.3.2/ szerint $(\nabla_X \sigma)^v = [X^H, \sigma^v]$, igy ekkor /11.3.1/ garantálja, hogy ∇_X "derivációó" - de - s ez figyelemreméltó! - ugyanerre a konklúzióra jutunk /9.3.1/ alkalmazásával is. - Megforditva, ha a prekovariáns deriválások derivációkként hatnak, ugy $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$: $\nabla_X \in {}^1\mathcal{L}\mathcal{D}\mathcal{O}(\xi, \xi)$ s ezért - könnyen ellenőrizhető módon - ∇_X azonosítható a linearizáltjával. ::

<u>/16.3.5/ megjegyzés</u> Az elmondottak után tökéletesen indokolttá válik a homogenitási feltételt teljesitő horizontális strukturához csatolt prekovariáns deriválásra ill. konnexióra a <u>kovariáns deriválás</u> ill. a <u>lineáris konnexió</u> terminus bevezetése. Mivel a horizontális struktura paraméterei - ismét csak /15.3.4//1/$\Leftrightarrow$/11/ folytán - ekkor $N_i^\alpha = (N_{i\beta}^\alpha \circ \pi)y^\beta$ $\left((\alpha, i) \in \underline{r} \times \underline{n},\ N_{i\beta}^\alpha \in C^\infty(M)!\right)$ alakban adhatók meg, most $\nabla_X \sigma = X^i\left(\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial u^i} + N_i^\alpha \circ \sigma\right)e_\alpha = X^i\left(\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial u^i} + N_{i\beta}^\alpha \sigma^\beta\right)e_\alpha$. - Világos, hogy igy

megérkeztünk a konnexióelmélet jól kitaposott országutjához /ld. pl. [GHV], II. Ch. VII/ s erre föllépni már nem feladatunk. Záróakkordként arra mutatunk még rá, hogy miként nyilik mód lineáris konnexió definiálására a Spencer-operátor //9.1.2// segitségével.

<u>/16.3.6/ állitás</u> Legyen $\xi \in VB(M)$, H pedig homogenitási feltételt teljesitő horizontális struktura ξ -n. Ekkor a $\sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi \longmapsto \mathfrak{D}_S[\gamma(\sigma)]$ leképezés - ahol $\gamma \in \mathrm{Sec}\, J^1\xi$, $H = \mathrm{Im}\,\gamma$, $\mathfrak{D}_S$ pedig a Spencer-operátor - elsőrendü lineáris differenciáloperátor, mégpedig $\mathfrak{D}_S \circ \gamma \in {}^1\mathcal{L}\mathcal{D}\mathcal{O}(\xi; \tau^*_M \otimes \xi)$ és $\nabla = \mathfrak{D}_S \circ \gamma$.

:: /9.1.2/ értelmében $\forall \sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi$: $\mathfrak{D}_S[\gamma(\sigma)] = j(p \circ \gamma(\sigma)) - \gamma(\sigma) = j\sigma - \gamma(\sigma) \in \mathrm{Sec}(\tau^*_M \otimes \xi)$ és /9.1.2/ valamint /15.3.4//1/$\Leftrightarrow$/7/ azt is garantálja, hogy $\mathfrak{D}_S \circ \gamma$ lineáris differenciáloperátor. Mivel [GHV], Vol. I, Ch. II/Prop. XIV és /8.1/ folytán $\mathrm{Sec}(\tau^*_M \otimes \xi) \cong \mathrm{Sec}\,\tau^*_M \otimes \mathrm{Sec}\,\xi = A^1(M) \otimes \mathrm{Sec}\,\xi \cong A^1(M;\xi)$, $\mathfrak{D}_S \circ \gamma \in A^1(M;\xi)$ s a /16.2.1/ bizonyitásában látottak figyelembevételével ez a ξ -értékü 1 -forma nem más, mint a H -hoz tartozó ∇ konnexió. ::

<u>/16.3.7/ megjegyzés</u> /16.3.6/-ot /9.1.3///i/-vel kombinálva, ujabb elegáns bizonyitás nyerhető arra, hogy a homogenitási feltétel teljesülésekor a prekovariáns deriválások $\mathrm{Sec}\,\xi$ -nek "derivációi".

<u>/16.3.8/ megjegyzés</u> Érdekes és fontos konnexiótipushoz jutunk, ha a nullmetszetétől megfosztott vektornyalábon tekintett, homogenitási feltételt teljesitő horizontális strukturából indulunk ki. Diszkussziójukat mellőznünk kell e helyen, megelégszünk ezzel kapcsolatban az [Sz 2] dolgozatunkra való utalással.

17.§. Görbület és integrálhatóság

/17.1/ A görbületelmélet absztrakt hátterét vázoljuk először, az 1.§-ban körvonalazott algebrai keretek között. - Tegyük föl, hogy L Lie-modulus s legyen $f,g\in \mathrm{End}\, L$. Ha

$$\forall x,y\in L:\ [\![f,g]\!](x,y):=[f(x),g(y)]+[g(x),f(y)]-g[f(x),y]-$$
$$-f[g(x),y]-g[x,f(y)]-f[x,g(y)]+f\circ g[x,y]+g\circ f[x,y],$$

akkor $[\![f,g]\!]:L\times L\to L$ bilineáris leképezés - így $[\![f,g]\!]\in \mathcal{T}^1_2(L)$ - és $[\![f,g]\!](x,y)=-[\![f,g]\!](y,x)$. Azt mondjuk, hogy az $[\![f,g]\!]$ $(1,2)$-tipusu /elsőrendben kontra-, másodrendben kovariáns/ tenzor f és g Nijenhuis-torziója, lévén ez az $L=\mathfrak{X}(M)$ $(M\in\mathcal{M})$ esetben jólismert, klasszikus konstrukció /ld. pl. [KN] I, p. 37 "absztaháltja". Ha speciálisan $g=f$, ugy

$$\frac{1}{2}[\![f,f]\!](x,y)=[f(x),f(y)]-f[f(x),y]-f[x,f(y)]+f\circ f[x,y]$$

adódik; a Nijenhuis-torzió ilyen formában fog szerephez jutni diszkussziónkban.

/17.1.1/ lemma Legyen H részmodulusa az L Lie-modulusnak s tegyük föl, hogy $L=H\oplus V$, ahol V Lie-részmodulus. Jelentse h L H-ra való, V-vel párhuzamos vetitését, azaz az $x\in L\mapsto h(x):=a_1$, ha $x=a_1+a_2$, $a_1\in H, a_2\in V$ leképezést. - H pontosan akkor Lie-részmodulusa L-nek, ha $\frac{1}{2}[\![h,h]\!]=0$.

:: /i/ Megmutatjuk, hogy $\forall x,y\in L: \frac{1}{2}[\![h,h]\!](x,y)\in V$. - Tegyük föl, hogy $x=a_1+a_2$, $y=b_1+b_2$, ahol $a_1,b_1\in H$; $a_2,b_2\in V$. Ekkor $\frac{1}{2}[\![h,h]\!](x,y)=[a_1,b_1]-h[a_1,b_1]-h[a_1,b_1]-h[a_1,b_1]-h[a_2,b_1]+$

$$+h[a_1,b_1]+h[a_1,b_2]+h[a_2,b_1]+h[a_2,b_2]=[a_1,b_1]-h[a_1,b_1]+$$
$$+h[a_2,b_2]=[a_1,b_1]-h[a_1,b_1],$$

hiszen $[a_2,b_2]\in V$ folytán $h[a_2,b_2]=0$. A kapott vektor nyilván V-beli. /ii/ Ha mármost H Lie-részmodulus, ugy /i/-ben $[a_1,b_1]\in H$, s következőleg $\frac{1}{2}[\![h,h]\!]=0$. Megforditva, az $\frac{1}{2}[\![h,h]\!]=0$ esetben $\forall x,y\in H:\ 0=[x,y]-h[x,y]$ adódik, ami azt jelenti, hogy $[x,y]\in H$. ::

/17.2/ A háttérre vetett pillantás után rátérünk a minket érdeklő szituáció részletes elemzésére. - Alapulveszünk egy $\xi=(E,\pi,M)$ fibrált teret s ezen rögzitjük a H horizontális strukturát. Mivel $\mathcal{X}_V E$ Lie-részmodulus $\mathcal{X}(E)$ -ben //4.3//, $\mathcal{X}_H E$ részmodulus ugyanitt és $\mathcal{X}(E)=\mathcal{X}_H E\oplus\mathcal{X}_V E$ //10.3.1//, a fölbontáshoz tartozó $h:\mathcal{X}(E)\longrightarrow\mathcal{X}_H E$ és $v:\mathcal{X}(E)\longrightarrow\mathcal{X}_V E$ projektorok megadásával a /17.1.1/-bel alaphelyzet egy realizációja áll elő. Tradicionális okokból egy -1 -es faktort is szerepeltetve, az $\mathcal{R}:=-\frac{1}{2}[\![h,h]\!]$ Nijenhuis-torziót most a horizontális struktura görbületi tenzormezőjének - vagy egyszerűen görbületének - nevezzük. A /17.1.1/ bizonyitásának /i/ részében tett észrevétel figyelembevételével tüstént adódik a

/17.2.1/ állitás Egy horizontális struktura görbületi tenzormezője vertikális értékű $(1,2)$ -tipusu tenzormező. ::

/17.2.2/ megjegyzés /i/ A H horizontális struktura görbületi tenzormezője előáll a $-\frac{1}{2}[\![v,v]\!]$ ill. a $-\frac{1}{8}[\![P,P]\!]$ Nijenhuis-torzióként is, ahol $v=1-h$, $P=2h-1$ pedig a H -hoz tartozó majdnem-szorzat struktura /v.ö. /14.3.1//. - Ez rutin számolással ellenőrizhető; a részleteket illetően utalunk a szerző [SZ1] és [SZ2] munkájára. /ii/ Képezhető az $\mathcal{X}(E)/\mathcal{X}_H E$ faktormodulus s mivel $\mathcal{X}_H E=\operatorname{Ker} v$, ez kanonikusan izomorf $\operatorname{Im} v=\mathcal{X}_V E$ -vel. Ha $q:\mathcal{X}(E)\longrightarrow\mathcal{X}(E)/\mathcal{X}_V E$ a természetes projekció, ugy $\forall X,Y\in\mathcal{X}(E): \mathcal{R}(X,Y)=-q[hX,hY]$, hiszen az emlitett izomorfizmusnál $q[hX,hY]$ -nak $v[hX,hY]$ felel meg, s /17.1.1/ bizonyitásából kiolvasható, hogy $v[hX,hY]=-\mathcal{R}(X,Y)$.

/17.3/ A görbületi tenzormezővel azonos információkkal szolgál, de a kalkulativ kezelhetőség szempontjából sokkal előnyösebb - mozgósithatóvá válik a 8.§-ban kifejtett apparátus! - a $\varrho:\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\longrightarrow\mathcal{X}_V E$, $(X,Y)\longmapsto\varrho(X,Y):=\mathcal{R}(X^H,Y^H)$

leképezés; ezt a H horizontális strukturához tartozó görbületi formának nevezzük. /8.3/ figyelembevételével részben az eddig elmondottak egyszerű korolláriuma a

/17.3.1/ állitás Egy horizontális struktura görbületi formája vertikális vektori 2 -forma, azaz $\varrho\in A^2(M;V\xi)$.

$\forall X,Y\in\mathcal{X}(M): \varrho(X,Y)=[X,Y]^H-[X^H,Y^H]=-v[X^H,Y^H]$.

:: Mivel $\varrho(X,Y) = \mathcal{R}(X^H,Y^H) = h[X^H,Y^H] - [X^H,Y^H]$, annyit kell csupán megmutatnunk, hogy $h[X^H,Y^H] = [X,Y]^H$. $X^H \overset{\pi}{\sim} X$ és $Y^H \overset{\pi}{\sim} Y$ folytán $[X^H,Y^H] = h[X^H,Y^H] + v[X^H,Y^H] \overset{\pi}{\sim} [X,Y]$. Itt $v[X^H,Y^H] \overset{\pi}{\sim} 0$, ezért egyben $h[X^H,Y^H] \overset{\pi}{\sim} [X,Y]$, következőleg $h[X^H,Y^H]$ horizontális liftje $[X,Y]$-nak. A horizontális lift egyértelműsége //11.1.1// miatt így $h[X^H,Y^H] = [X,Y]^H$. ::

/17.3.2/ következmény Ha speciálisan $\xi \in VB(M)$ és C a H-hoz tartozó konnektor, úgy $\forall X,Y \in \mathfrak{X}(M)$: $k \circ \varrho(X,Y) = -C \circ [X^H,Y^H]$. ::

- A /17.3.1/-ből munka nélkül nyerhető /17.3.2/ érdekességét az adja, hogy közvetlen kapcsolatot teremt a görbület és a konnektor között. Eredményünk [DO] //23/ általánositása.

Most bevetjük egyik leghatékonyabb fegyverünket.

/17.3.3/ TÉTEL Legyen $\xi \in FS(M)$, H horizontális struktura ξ-n, ℓ^H pedig a H-hoz tartozó horizontális fölemelés //11.1//. Ekkor $\varrho = -\frac{1}{2}[\ell^H,\ell^H]$, ahol a $[\,,\,]$ a /8.2.4/-ben bevezetett Nijenhuis-szorzat.

:: $\forall X,Y \in \mathfrak{X}(M)$: $[\ell^H,\ell^H](X,Y) := [\ell^H X,\ell^H Y] - \ell^H[X,Y] - \ell^H[X,Y] + \frac{1}{2}\ell^H[X,Y] +$

$$+\frac{1}{2}\ell^H[X,Y] - [\ell^H Y,\ell^H X] + \ell^H[X,Y] + \ell^H[Y,X] - \frac{1}{2}\ell^H[Y,X] - \frac{1}{2}\ell^H[Y,X] = 2([\ell^H X,\ell^H Y] - \ell^H[X,Y]),$$

innen $-\frac{1}{2}[\ell^H,\ell^H](X,Y) = [X,Y]^H - [X^H,Y^H] = \varrho(X,Y)$. ::

/17.3.4/ TÉTEL /Általánositott Bianchi-identitás/

Amennyiben H horizontális struktura a ξ fibrált téren és ℓ^H ill. ϱ a hozzátartozó liftelő forma ill. görbületi forma, úgy $[\ell^H,\varrho] = 0$ /a $[\,,\,]$ változatlanul a Nijenhuis-szorzatot jelöli/.

1. bizonyitás /8.2.4/ mechanikus alkalmazásával - figyelembevéve, hogy most $\bar{\xi} = 0$ és $\ell^H = 1_{\mathfrak{X}(M)}$ s kihasználva a vektormezők Lie-algebrájában érvényes Jacobi-identitás nyujtotta röviditési lehetőségeket - jutunk célhoz. Nevezetesen, $\forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$: $[\ell^H,\varrho](X,Y,Z) := \frac{1}{2}\{[X^H,\varrho(Y,Z)] - 2\varrho([X,Y],Z) +$

$$\varrho([X,Y],Z) + [Y^H,\varrho(Z,X)] - 2\varrho([Y,Z],X) + \varrho([Y,Z],X) + [Z^H,\varrho(X,Y)] -$$

$$-2\varrho([Z,X],Y)+\varrho([Z,X],Y)-[Y^H,\varrho(X,Z)]+2\varrho([Y,X],Z)-\varrho([Y,X],Z)-$$

$$-[X^H,\varrho(Z,Y)]+2\varrho([X,Z],Y)-\varrho([X,Z],Y)-[Z^H,\varrho(Y,X)]+2\varrho([Z,Y],X)-$$

$$-\varrho([Z,Y],X)\}=[X^H,\varrho(Y,Z)]+[Y^H,\varrho(Z,X)]+[Z^H,\varrho(X,Y)]-\varrho([X,Y],Z)-$$

$$-\varrho([Y,Z],X)-\varrho([Z,X],Y)\overset{(17.3.1)}{=}[X^H,[Y,Z]^H]-[X^H,[Y^H,Z^H]]+$$

$$+[Y^H,[Z,X]^H]-[Y^H,[Z^H,X^H]]+[Z^H,[X,Y]^H]-[Z^H,[X^H,Y^H]]-[[X,Y],Z]^H+$$

$$+[[X,Y]^H,Z^H]-[[Y,Z],X]^H+[[Y,Z]^H,X^H]-[[Z,X],Y]^H+[[Z,X]^H,Y^H]=0\ ::$$

<u>2. bizonyitás</u> Bemutatunk egy másik, konceptuálisabb - s igy a dolog lényegét megvilágitó - érvelést. - /17.3.3/ alapján $[\ell^H,\varrho]=[\ell^H,-\frac{1}{2}[\ell^H,\ell^H]]=-\frac{1}{2}[\ell^H,[\ell^H,\ell^H]]$. Mivel /8.2.4/ értelmében $A_p(M,\tau_E)$ graduált Lie-algebra, az /1.2/-beli azonosságból adódóan $[\ell^H,[\ell^H,\ell^H]]=0$. ::

Rövidesen rá fogunk mutatni, hogy a levezetett összefüggés joggal tekinthető a lineáris konnexiókra ismert Bianchi-identitás /ld. pl. [GHV], II. p.327/ általánositásának.

<u>/17.3.5/ megjegyzés</u> Az a fogalmi harmónia, amely az általánositott Bianchi-identitásra adott 2. bizonyitásban válik igazán érzékelhetővé, nyilvánvalóvá teszi, hogy a görbületelmélet adekvát eszközei: liftelő formával megadott horizontális struktura + Nijenhuis-szorzással ellátott leszükitett FN-modulus. Mégsem érdektelen megemliteni: ℓ^H -ból kiindulva a ϱ görbületi forma technikailag lényegesen eltérő módokon is származtatható. Egy ilyen alternativát vázolunk most. - Első lépésként $A_p(M,\tau_E)$ -n bevezetünk egy igen természetes Lie-deriválást. Emlékeztetve arra /ld. pl. /8.2.1//, hogy $A_p(M,\tau_E)\cong$ $\cong A(M)\otimes\mathcal{X}_pE$, a modulus dekomponálódó elemein legyen $\mathcal{L}_X(\omega\otimes Y):=\mathcal{L}_{\widetilde{X}}\omega\otimes Y+\omega\otimes\mathcal{L}_XY$, ahol $X,Y\in\mathcal{X}_pE$, $X\sim\widetilde{X}$, $\omega\in A(M)$ s az operációt a teljes $A(M)\otimes\mathcal{X}_pE$ -re terjesszük ki $\mathbb{R}$ -lineárisan. Ekkor - speciálisan - tetszőleges $X\in\mathcal{X}(M)$ segitségével képezhető az $\mathcal{L}_{X^H}\ell^H$ Lie-derivált s a következő

eredmény nyerhető rávonatkozóan:

<u>/17.3.6/ állítás</u> Ha ℓ^H, v és ς rendre a H horizontális strukturához tartozó horizontális fölemelés, vertikális projektor és görbületi forma, ugy

$$\forall X,Y \in \mathfrak{X}(M): \quad \varsigma(X,Y) = \mathcal{L}_{X^H}\ell^H(Y) = -\mathcal{L}_{X^H}v(Y^H)$$

ahol v -nek mint $\mathfrak{X}(E) \longrightarrow \mathfrak{X}(E)$ $(1,1)$-tenzormezőnek a szokásos értelemben vett Lie-deriváltja szerepel.

:: Formuláinkhoz meglehetősen hosszadalmas - de rutinszerű - lokális számolással jutottunk, amelynek puszta fölvázolásától is megkíméljük az Olvasót. ::

/17.4/ Továbbra is a $\xi=(E,\pi,M)$ fibrált téren adott H horizontális struktura alapulvételével dolgozunk. - H -t <u>integrálhatónak</u> nevezzük, ha a /reá nézve/ horizontális vektormezők alkotta $\mathfrak{X}_H E$ modulus <u>Lie-részmodulusa</u> $\mathfrak{X}(E)$ -nek. A feltétel nyilván másképpen is megfogalmazható: H definiciónk szerinti integrálhatósága pontosan annyit jelent, hogy a τ_E érintőnyaláb $H\xi$ risznyalábja involutiv disztribuciója τ_E -nek, a szokásos /[AMR], 4.4.1 Def./ értelmében. Ebben a szituációban az angol terminológia rendszerint a "flat connection" szóhasználattal él /a magyar még nincs kikristályosodva/; Frobenius tételét /[AMR], 4.4.3 Th./ azonban elegendő érvnek éreztük választásunk mellett. Az integrálhatóság és görbületmentesség klasszikusan ismert egybeesése fennáll a mi jóval általánosabb fogalmi kereteink között is, ez az egyik lényeges mondandója a következő eredménynek.

<u>/17.4.1/ állítás</u> Egy H horizontális strukturára a következő kijelentések egyenértékűek:

/i/ H integrálható. /ii/ H görbületi tenzormezője - azaz a $-\frac{1}{2}[\![h,h]\!]$ Nijenhuis-torzió - eltűnik. /iii/ H görbületi formája - vagy ami ugyanaz //17.3.3//: a $-\frac{1}{2}[\ell^H,\ell^H]$ Nijenhuis-szorzat zérus. /iv/ $[\![v,v]\!]=0$, $v=1-h$. /v/ $[\![P,P]\!]=0$, $P=2h-1$. /vi/ $v\circ[\![h,h]\!]=0$. /vii/ $h\circ[\![v,v]\!]=0$.

:: /i/$\Longleftrightarrow$/ii/ adódik /17.1.1/-ből, /i/ és /iv/ valamint /i/ és /v/ ekvivalenciáját pedig garantálja /17.2.2//i/.

/i/$\Longleftrightarrow$ /ii/ folytán az /i/$\Longrightarrow$ /iii/ implikáció automatikus s a megforditása világos, ha meggondoljuk, hogy alkalmas horizontálisan fölliftelt vektormezők lokális bázisát képezik $\mathcal{H}_H E$ -nek. A továbbiak egyszerű számolással igazolhatók, ld. [Sz3] munkánkat. ::

A H -hoz tartozó h és v projektor valamint a P majdnem-szorzat struktura segitségével geometriailag érzékletesebb megfogalmazásai is nyerhetők az integrálhatóság kritériumának, ha /ld. /10.2// $\tau_E \longrightarrow \tau_E$ E -morfizmusokként interpretáljuk e leképezéseket.

- Tekintsünk először általánosan egy N sokaságot s ennek érintőnyalábján egy $f \in \mathrm{Mor}_N(\tau_N, \tau_N)$ morfizmust. Ha az $f_p := f \restriction T_pN$ $(p \in N)$ lineáris operátorok mindegyike ugyanazokkal a konstans geometriai multiplicitásu $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ $(k \leq \dim N)$ sajátértékekkel rendelkezik, akkor képezhetők τ_N azon $S(\lambda_1), \dots, S(\lambda_k)$ résznyalábjai, melyeknek fibrumai az f_p operátorok jelzett sajátértékhez tartozó sajátalterei. Amennyiben a szóbanforgó résznyalábok és az $S(\lambda_1) \oplus \dots \oplus S(\lambda_j)$ $(1 \leq j \leq k)$ Whitney-összegek mindegyike involutiv disztribució, ugy - Haantjes tétele / [FrNi], Th.III/ által motiválva - az f morfizmust <u>integrálható</u>nak nevezzük.

- Visszatérve a minket érdeklő $h, v, P : \tau_E \longrightarrow \tau_E$ morfizmusokhoz, világos, hogy mindegyikük eleget tesz az imént f -re kiszabott feltételnek. Tetszőleges $z \in E$ pontban h_z, v_z és P_z sajátértékei $1, 0$; $0, 1$ ill. $1, -1$ s az előbbi jelölésekkel h esetén $S(1) = H\xi = \mathrm{Im}\, h$, $S(0) = V\xi$, v esetén $S(0) = H\xi$, $S(1) = V\xi$, mig ha P -ről van szó, akkor $S(1) = H\xi$, $S(-1) = V\xi$. Mivel $V\xi$ involutiv disztribució /ld. /4.3//, közvetlenül adódik a mondottakból a

<u>/17.4.2/ következmény</u> Egy horizontális struktura integrálhatósága egyenértékű a hozzátartozó horizontális és vertikális projektor ill. majdnem szorzat struktura valamelyikének - s ezért bármelyikének - integrálhatóságával.::

E gondolatsor lezárásaként egy meglehetősen egyszerű, speciálisabb természetű eredményt igazolunk.

<u>/17.4.3/ állitás</u> Legyen $\omega : \mathcal{X}(E) \times \mathcal{X}(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ v -reguláris bilineáris függvény. - A H^ω horizontális struktura //10.3.3// pontosan akkor integrálható, ha $\forall\, X \in \mathcal{X}_V E :\ h^*(\mathcal{L}_X \omega - i_X d\omega) = 0$, ahol d a külső diffe-

renciálás operátora s a baloldali forma h által értelemszerűen képzett pull-back.

:: Alkalmazva az igen esztétikus $\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X$ formulát,
$\forall Y, Z \in \mathcal{X}(E)$: $h^*(\mathcal{L}_X \omega - i_X d\omega)(Y,Z) = d i_X \omega(hY, hZ) =$
$= hY\,(i_X\omega(hZ)) - hZ\,(i_X\omega(hY)) - i_X\omega([hY,hZ]) = hY\,(\omega(X,hZ)) -$
$- hZ\,(\omega(X,hY)) - \omega(X,[hY,hZ]) = -\omega(X,[hY,hZ])$.

/10.3.3/ értelmében itt a jobboldal akkor és csak akkor tűnik el tetszőleges $X \in \mathcal{X}_V E$; $Y, Z \in \mathcal{X}(E)$ mellett, ha $[hY, hZ] \in \mathcal{X}_{H^\omega}$, azaz ha H^ω integrálható. ::

/17.5/ Szakaszunk hátralevő részében föltesszük, hogy $\xi \in VB(M)$ s megvizsgáljuk, milyen kihatásai vannak a homogenitási feltételnek a görbület vonatkozásában. - Tegyük föl tehát, hogy H homogenitási feltételt teljesítő horizontális struktura ξ -n. Ekkor a H -hoz tartozó $\nabla : Sec\,\xi \longrightarrow A^1(M;\xi)$ prekonnexió lineáris konnexió //16.3.5//, amelynek görbületi formája a jól ismert $R^\nabla : \mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M) \longrightarrow Hom_{C^\infty(M)}(Sec\,\xi, Sec\,\xi),\ (X,Y) \longmapsto R^\nabla(X,Y) := \nabla_X \circ \nabla_Y - \nabla_Y \circ \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$ leképezés. A kézenfekvő kérdés: miként kapcsolódik R^∇ a /17.3/-ban bevezetett "általános" görbületi formához? Erre válaszol a

<u>/17.5.1/ TÉTEL</u> Legyen H homogenitási feltételt teljesítő horizontális struktura a ξ vektornyalábon. Ekkor a struktura görbületi formája ill. az általa származtatott lineáris konnexió görbületi formája között fennáll az $(R^\nabla(X,Y)(\sigma))^v = -[\varrho(X,Y), \sigma^v]$ $(X, Y \in \mathcal{X}(M)\ ,\ \sigma \in Sec\,\xi)$ reláció.

:: /16.3.2/, a Jacobi-identitás és /17.3.2/ alkalmazásával

$$(R^\nabla(X,Y)(\sigma))^v = (\nabla_X(\nabla_Y\sigma))^v - (\nabla_Y(\nabla_X\sigma))^v - (\nabla_{[X,Y]}\sigma)^v =$$
$$= [X^H, (\nabla_Y\sigma)^v] - [Y^H, (\nabla_X\sigma)^v] - [[X,Y]^H, \sigma^v] = [[X^H, Y^H], \sigma^v] -$$
$$-[[X,Y]^H, \sigma^v] = [[X^H, Y^H] - [X,Y]^H, \sigma^v] = -[\varrho(X,Y), \sigma^v].\ ::$$

A következő - önmagában is érdekes - észrevétel lehetővé teszi a ϱ és R^∇ között nyert alapvető összefüggés egy hasznos átfogalmazását.

<u>/17.5.2/ állítás</u> Megtartva az iménti feltételeket és jelöléseket, $\forall X,Y \in \mathfrak{X}(M), \sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi$:

$$(k \circ \varrho(X,Y) \circ \sigma)^{v} = [\sigma^{v}, \varrho(X,Y)].$$

:: A szokásos vektortérképet alapulvéve, direkt, lokális számolással verifikáljuk a felirt relációt. – $\varrho \in A^2(M, V\xi)$ lévén, /8.3.3/ értelmében $\varrho = R^{\alpha}_{ij} \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}} \wedge du^{i} \wedge du^{j}$ irható, ahol az $R^{\alpha}_{ij} \in C^{\infty}(E)$ komponensfüggvények explicite megadhatók H paraméterei segitségével, nevezetesen $R^{\alpha}_{ij} = \frac{\partial N^{\alpha}_{j}}{\partial x^{i}} + N^{\beta}_{i} \frac{\partial N^{\alpha}_{j}}{\partial y^{\beta}}$ alakban. Ekkor $\varrho(X,Y) \circ \sigma \restriction \sigma^{-1}(\mathcal{U}) = (R^{\alpha}_{[ij]} \circ \sigma) X^{i} Y^{j} \left(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}} \circ \sigma\right)$, ahol $R^{\alpha}_{[ij]} := R^{\alpha}_{ij} - R^{\alpha}_{ji}$ s igy $k \circ \varrho(X,Y) \circ \sigma \restriction \sigma^{-1}(\mathcal{U}) = (R^{\alpha}_{[ij]} \circ \sigma) X^{i} Y^{j} e_{\alpha}$, ahonnan //4.4.3// $(k \circ \varrho(X,Y) \circ \sigma)^{v}$ koordinátakifejezése $[(R^{\alpha}_{[ij]} \circ \sigma) X^{i} Y^{j}] \circ \pi \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}$. Figyelembevéve most, hogy a homogenitás miatt H paraméterei az $N^{\alpha}_{i} = (N^{\alpha}_{i\beta} \circ \pi) y^{\beta}$ $(N^{\alpha}_{i\beta} \in C^{\infty}(M))$ alakban állithatók elő, ϱ komponensfüggvényeire az $R^{\alpha}_{ij} = (R^{\alpha}_{ij\beta} \circ \pi) y^{\beta}$ reláció adódik, ahol $R^{\alpha}_{ij\beta} \in C^{\infty}(M)$ $/(i,j) \in \underline{n} \times \underline{n}, (\alpha,\beta) \in \underline{r} \times \underline{r}/$, s igy végül $(k \circ \varrho(X,Y) \circ \sigma)^{v} \restriction \pi^{-1}(\mathcal{U}) = (R^{\alpha}_{[ij]\beta} X^{i} Y^{j} \sigma^{\beta} \circ \pi) \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}$.

Másfelől $[\sigma^{v}, \varrho(X,Y)] \restriction \pi^{-1}(\mathcal{U}) = [(\sigma^{\beta} \circ \pi) \frac{\partial}{\partial y^{\beta}}, R^{\alpha}_{[ij]} (X^{i} Y^{j} \circ \pi) \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}] =$

$$= \frac{\partial R^{\alpha}_{[ij]}}{\partial y^{\beta}} (X^{i} Y^{j} \circ \pi)(\sigma^{\beta} \circ \pi) \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}} = \left(R^{\alpha}_{[ij]\beta} X^{i} Y^{j} \sigma^{\beta} \circ \pi\right) \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}},$$

formulánk tehát helyes. ::

<u>/17.5.3/ következmény</u> /17.5.1/ feltételei mellett a ϱ és R^{∇} görbületi forma között fennáll az $R^{\nabla}(X,Y)(\sigma) = k \circ \varrho(X,Y) \circ \sigma$ összefüggés / $\sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi$; $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ tetszőleges/. ::

– Megjegyezzük, hogy /17.5.3/-at [Sz3]-ban is leszármaztattuk, az ittenitől eltérő, direktebb meggondolással.

<u>/17.5.4/ következmény</u> Ha $\mathcal{C}: TE \to E$ lineáris konnektor és $\nabla: \sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi \longmapsto \nabla\sigma := \mathcal{C} \circ T\sigma$ a megfelelő konnexió, akkor $\forall X,Y \in \mathfrak{X}(M), \sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi$: $R^{\nabla}(X,Y)(\sigma) = -\mathcal{C} \circ [X^{H}, Y^{H}] \circ \sigma$.

:: Kijelentésünk közvetlenül adódik /17.3.2/-ből és /17.5.3/-ból. ::

/17.6/ Teljesebbé tesszük a Bianchi-identitásra vonatkozó, /17.3/-ban elkezdett diszkussziónkat. - Ha $\nabla: Sec\,\xi \longrightarrow A^1(M;\xi)$ lineáris konnexió, akkor - mint az jól ismert /ld. pl. [GHV], II, p. 326/ - bevezethető a

$$d^\nabla: A^k(M;\xi) \longrightarrow A^{k+1}(M;\xi),\ \Omega \longmapsto d^\nabla\Omega;\ d^\nabla\Omega(X_0,X_1,\dots,X_k) := $$
$$= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \nabla_{X_j}\Omega(X_0,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_k) +$$
$$+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\Omega([X_i,X_j],X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_k)\quad /X_i \in \mathfrak{X}(M),\ 0\le i\le k,\ k>0/$$

külső kovariáns deriválás. Könnyü számolással adódik, hogy ha $R^\nabla_\sigma: \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \longrightarrow Sec\,\xi,\ (X,Y)\longmapsto R^\nabla_\sigma(X,Y) := R^\nabla(X,Y)(\sigma)$, ahol R^∇ ∇ görbületi formája, akkor $R^\nabla_\sigma \in A^2(M;\xi)$ és $R^\nabla_\sigma = d^\nabla(d^\nabla\sigma)$. Ez az észrevétel lehetővé teszi az R^∇ -ra vonatkozó "szokásos" Bianchi-identitás egy gyors és elegáns leszármaztatását, az igen finom kivitelezést illetően [GHV] II/ 7.15-re utalunk. - Ezen a ponton azonban magától értetődő természetességgel vetődik föl az általánositás gondolata. A kovariáns deriváltra /16.3.2/-ben nyert $(\nabla_X\sigma)^v = [X^H,\sigma^v]$ formula a d^∇ operátor következő, kézenfekvő módositását sugallja: vezessük be a $d^H: A^k(M;V\xi) \longrightarrow A^{k+1}(M;V\xi),\ \Psi\longmapsto d^H\Psi$ leképezést a $d^H\Psi(X_0,\dots,X_k) := \sum_{j=0}^{k}(-1)^j[X_j^H,\Psi(X_0,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_k)] + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\Psi([X_i,X_j],\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_k)$ előírással. Világos, hogy ez a konstrukció már tetszőleges ξ fibrált tér fölötti vertikális FN -algebra esetén értelmes s rutin számolással ellenőrizhető, hogy d^H elsőfoku derivációja //1.2// az $A(M;V\xi)$ graduált Lie-algebrának. d^H -t a H horizontális strukturához tartozó külső kovariáns deriválásnak hivjuk. - Megmutatjuk, hogy az általánositott Bianchi-identitás d^H segitségével is elérhető.

<u>/17.6.1/ állitás</u> Legyen H horizontális struktura a ξ fibrált téren. - A H -hoz tartozó görbületi forma d^H szerinti deriváltjára $d^H\varrho = [\ell^H,\varrho]\ (=0)$ teljesül.

$$:: \quad \forall X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M):\ d^H\varrho(X,Y,Z) := [X^H,\varrho(Y,Z)] - [Y^H,\varrho(X,Z)] + [Z^H,\varrho(X,Y)] -$$
$$-\varrho([X,Y],Z) + \varrho([X,Z],Y) - \varrho([Y,Z],X) = [X^H,\varrho(Y,Z)] + [Y^H,\varrho(Z,X)] +$$
$$+ [Z^H,\varrho(X,Y)] - \varrho([X,Y],Z) - \varrho([Y,Z],X) - \varrho([Z,X],Y)\ ,$$

s igy pontosan ahhoz a kifejezéshez jutottunk, amit $[\ell^H, \varrho](X,Y,Z)$ -re kaptunk /17.3.4/ 1. bizonyitásának második lépésében. ::

Visszautalva végül a /17.3.4/-et követő előrejelzésre: a d^V és d^H operátor között a homogenitási feltétel teljesülésekor fennálló - de egyébként is bensőséges - kapcsolat teszi érthetővé, miért szóltunk /17.3.4/-ben a Bianchi-identitás általánositásáról.

18.§. Kitekintés: affin-, projektiv- és Finsler-strukturák

/18.0/ Meglehetős részletességgel bemutattuk, hogy miként épithető föl a differenciálgeometria alapjainak hagyományosan "Konnexióelmélet" cimszó alá sorolt fejezete a horizontális strukturák fogalmi bázisán, nagyfoku általánosságban. E záró §-ban azt szeretnénk illusztrálni, hogyan működik apparátusunk speciálisabb körülmények között - s egyben elkötjük a még szabadon lógó végeket. A példák kiválasztása nem ötletszerü. Az erlangeni programra gondolva éreztük kivánatosnak jelezni - de a terjedelmi korlátok miatt valóban csak jelezni! -, milyen természetes módon szolgál/hat/nak alapul a horizontális strukturák az affin és projektiv konnexiók tárgyalásánál. /Jól ismert, hogy az "affin konnexió" terminus mennyire többértelmü az irodalomban. Mi E. Cartan fölfogását követjük; v.ö. [CA]./ - A Finsler-geometria még napjainkban is kissé periférikus helyzetet foglal el a köztudatban. Jellegzetesnek mondható ebből a szempontból A. Besse megjegyzése: "Although Finsler manifolds are found naturally in mechanics and physics, they turn out to be less important than Riemannian manifolds and good published material on them is rare /[Be2], p.1; az erősen vitatható rész kiemelése tőlem/. Reméljük, hogy a Finsler-konnexiókkal kapcsolatos észrevételeinkkel sikerül demonstrálni: ezek természetes módon kötődnek a gyökereket jelentő horizontális strukturákhoz s egyben mélyebb megértésüket is elősegitik.

/18.1/ A párhuzamos eltolások szolgáltassanak <u>affin</u> leképezéseket az érintőterek között: ez volt E.Cartan vezérelve az affin konnexiók bevezetésénél. Mivel az affin leképezések lineáris leképezések és tranzlációk kompoziciói, az affin konnexiók absztrakt megragadásához - legalábbis a mi nézőpontunkból - a horizontális struktura alkalmas "tranzlációval való módositása" látszik szükségesnek. - Az ötlet pontos formában keresztülvihető. Vegyük alapul a $\xi = (E, \pi, M)$ fibrált teret, legyen H horizontális struktura ezen s jelölje - mint eddig is - ℓ^H a H -hoz tartozó liftelő formát. Megadva még egy $\lambda \in A^1(M; V\xi)$ vertikális formát, a (H, λ) vagy (ℓ^H, λ) párról azt mondjuk, hogy <u>affin struktura</u> a ξ fibrált téren, az $\mathcal{A}\ell^H := \ell^H - \lambda \in A^1_P(M; \tau_E)$ leképezést pedig <u>affin liftelő formaként</u> emlitjük. A tekintett affin struktura <u>/affin/ görbületi formáján</u> az $\mathcal{A}g := -\frac{1}{2}[\mathcal{A}\ell^H, \mathcal{A}\ell^H] = -\frac{1}{2}[\ell^H - \lambda, \ell^H - \lambda]$ Nijenhuis-szorzatot értjük. Ha speciálisan $\xi = \tau_M$ és λ gyanánt a /8.3.4/-ben leirt ℓ^V vertikális liftelést választjuk, akkor az (ℓ^H, ℓ^V) affin strukturát τ_M - vagy egyszerüen M - fölötti <u>klasszikus affin strukturának</u> nevezzük. Ez a definició közvetlen /"nemlineáris"/ általánositása a klasszikus affin strukturára /általunk ismert/ egyetlen további -[Pr]-ben föllelhető - modern értelmezésnek. - Megmutatjuk, hogyan származtatható le a klasszikus affin struktura görbületére vonatkozó "előállitási tétel" - v.ö. [Pr] 2.113 - a mi esetünkben és eszközeinkkel. Egy önmagában is figyelemreméltó észrevétellel kezdjük.

<u>/18.1.1/ állitás</u> Legyen H horizontális struktura τ_M -en, ℓ^H a megfelelő liftelő forma s tekintsük az $\ell^V \in A^1(M; V\xi)$ vertikális liftelést //8.3.4//. Ekkor $[\ell^H, \ell^V] = d^H \ell^V := t$, nevezetesen $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M): t(X,Y) = [X^H, Y^V] - [Y^H, X^V] - [X,Y]^V$. Amennyiben H homogenitási feltételt teljesit, ugy $t(X,Y) = (T(X,Y))^V = T^V(X,Y)$, ahol T a H -hoz tartozó - lineáris - konnexió torziója: $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ $/\xi := \tau_M/$.

:: $\bar{\ell}^H = 1_{\mathfrak{X}(M)}$ és $\bar{\ell}^V = 0$ figyelembevételével /8.2.4/ alapján $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$: $[\ell^H, \ell^V](X,Y) = [X^H, Y^V] - [Y^H, X^V] - [X,Y]^V + [Y,X]^V + \frac{1}{2}[X,Y]^V - \frac{1}{2}[Y,X]^V = [X^H, Y^V] - [Y^H, X^V] - [X,Y]^V$

s azonnal látható, hogy a /17.6/-ban bevezetett d^H operátor alkalmazásával is ugyanerre az eredményre jutunk. Amennyiben H homogenitási feltételt teljesit, /16.3.2/-ből adódóan $[X^H, Y^v] = (\nabla_X Y)^v$, $[Y^H, X^v] = (\nabla_Y X)^v$ és igy $\tau(X,Y) = (T(X,Y))^v$ következik. ::

<u>/18.1.2/ megjegyzés</u> A /18.1.1/ által bevezetett $\tau \in A^2(M; V\tau_M)$ formát a H horizontális struktura <u>torzió-formájának</u> nevezhetjük: ez veszi át a klasszikus torzió-tenzor szerepét a nemlineáris esetben.

<u>/18.1.3/ állitás</u> Egy klasszikus affin struktura affin görbületi formája a hozzátartozó horizontális struktura görbületi és torzió-formájának összege.

:: A fentebb bevezetett jelölésekkel $\mathcal{A}\varrho = -\frac{1}{2}[\ell^H - \ell^v, \ell^H - \ell^v] = -\frac{1}{2}[\ell^H, \ell^H] + \frac{1}{2}[\ell^H, \ell^v] + \frac{1}{2}[\ell^v, \ell^H] - \frac{1}{2}[\ell^v, \ell^v]$. Itt /17.3.3/ értelmében az első tag a ϱ görbületi forma, mig /8.3.5/ folytán az utolsó tag eltünik. /1.2//1° miatt $[\ell^H, \ell^v] = [\ell^v, \ell^H]$, igy /18.1.1/ alapján a két középső tag összege a τ torzió-forma. ::

Megvizsgáljuk végül, milyen alakot ölt a klasszikus affin struktura görbületére vonatkozó "általánositott Bianchi-identitás".

<u>/18.1.4/ TÉTEL</u> Tegyük föl, hogy (H, ℓ^v) klasszikus affin struktura τ_M -en. Az $\mathcal{A}\varrho$ affin görbületi formának a H -hoz tartozó külső kovariáns derivácio //17.6// szerinti kovariáns deriváltjára érvényes a $d^H \mathcal{A}\varrho = [\ell^v, \varrho]$ "affin Bianchi-identitás".

:: /18.1.3/ és /17.6.1/ folytán $d^H \mathcal{A}\varrho = d^H \tau$ adódik, ahol τ H torzió-formája, igy feladatunk a $d^H \tau = [\ell^v, \varrho]$ összefüggés igazolására redukálódik. Tetszőleges $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőket választva, mind a bal-, mind pedig a jobboldalt kiértékeljük az (X, Y, Z) hármason. - A /17.6/-beli definició és /18.1.1/ alkalmazásával $d^H \tau(X,Y,Z) = [X^H, \tau(Y,Z)] - [Y^H, \tau(X,Z)] +$

$$+[Z^H, \tau(X,Y)] - \tau([X,Y],Z) + \tau([X,Z],Y) - \tau([Y,Z],X) = [X^H, [Y^H, Z^v]] -$$

$$-[X^H, [Z^H, Y^v]] - [X^H, [Y,Z]^v] - [Y^H, [X^H, Z^v]] + [Y^H, [Z^H, X^v]] + [Y^H, [X,Z]^v] +$$

$$+[Z^H, [X^H, Y^v]] - [Z^H, [Y^H, X^v]] - [Z^H, [X,Y]^v] - [[X,Y]^H, Z^v] + [Z^H, [X,Y]^v] +$$

$$+[[X,Y],Z]^v + [[X,Z]^H, Y^v] - [Y^H, [X,Z]^v] - [[X,Z],Y]^v - [[Y,Z]^H, X^v] +$$

$$+[X^H, [Y,Z]^v] + [[Y,Z],X]^v.$$

összefüggésünk jobboldalán $[[X,Y],Z]^V-[[X,Z],Y]^V+[[Y,Z],X]^V=$ $\left([[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]\right)^V=0$, a Jacobi-identitás szerint; a 3. és 17., 6. és 14. valamint a 9. és 11. tagok kiejtik egymást, míg $[X^H,[Y^H,Z^V]]-[Y^H,[X^H,Z^V]]$ helyett ugyancsak a Jacobi-identitás alapján $-[Z^V,[X^H,Y^H]]$ irható; hasonlóképpen $[Y^H,[Z^H,X^V]]-[Z^H,[Y^H,X^V]]=-[X^V,[Y^H,Z^H]]$, $-[X^H,[Z^H,Y^V]]+$ $+[Z^H,[X^H,Y^V]]=-[Y^V,[Z^H,X^H]]$, következésképpen $d^H t(X,Y,Z)=$ $=-[[X,Y]^H,Z^V]-[[Y,Z]^H,X^V]-[[Z,X]^H,Y^V]-[X^V,[Y^H,Z^H]]-[Y^V,[Z^H,X^H]]-$ $-[Z^V,[X^H,Y^H]]$. Másfelől $-\ell^V\cdot\xi=0$ és /17.3.1/ figyelembevételével, majd néhány kézenfekvő átalakitással - /8.2.4/ azt adja, hogy $[\ell^V,\varrho](X,Y,Z)=\frac{1}{2}\{[X^V,\varrho(Y,Z)]+[Y^V,\varrho(Z,X)]+[Z^V,\varrho(X,Y)]-$ $-[Y^V,\varrho(X,Z)]-[X^V,\varrho(Z,Y)]-[Z^V,\varrho(Y,X)]\}=\frac{1}{2}\{[X^V,[Y,Z]^H]-[X^V,[Y^H,Z^H]]+[Y^V,[Z,X]^H]-$ $-[Y^V,[Z^H,X^H]]+[Z^V,[X,Y]^H]-[Z^V,[X^H,Y^H]]-[Y^V,[X,Z]^H]+[Y^V,[X^H,Z^H]]-$ $-[X^V,[Z,Y]^H]+[X^V,[Z^H,Y^H]]-[Z^V,[Y,X]^H]+[Z^V,[Y^H,X^H]]\}=$ $=-[[X,Y]^H,Z^V]-[[Y,Z]^H,X^V]-[[Z,X]^H,Y^V]-[X^V,[Y^H,Z^H]]-$ $-[Y^V,[Z^H,X^H]]-[Z^V,[X^H,Y^H]]$.

- A két eredményt összevetve, a tétel állitását kapjuk. ::

<u>/18.1.5/ következmény</u> Legyen H horizontális struktura az M sokaság érintőnyalábján, ϱ görbületi és t torzió-formával. Ekkor $\forall X,Y,Z\in\mathcal{X}(M): -d^H t(X,Y,Z)=\sigma[\varrho(X,Y),Z^V]$, ahol az σ szimbólum az X,Y,Z vektormezőkre végrehajtandó ciklikus összegzést jelöl. Amennyiben speciálisan H homogenitási feltételt teljesit, ugy a hozzátartozó ∇ /lineáris/ konnexió görbületére $d^H t(X,Y,Z)=\sigma[R^\nabla(X,Y)(Z)]^V$ teljesül, ha ráadásul ∇ torziómentes is, akkor az $\sigma R^\nabla(X,Y)(Z)=0$ klasszikus /"első"/ Bianchi-identitáshoz /ld. pl. [Pr], 2.107/ jutunk.

:: /17.3.1/ értelmében $\sigma[\varrho(X,Y),Z^V]=\sigma\{[[X,Y]^H,Z^V]-[[X^H,Y^H],Z^V]\}$ s pontosan ez adódott a megelőző bizonyitásban $-d^H\varrho(X,Y,Z)$ -re. A továbbiakban következnek abból, hogy a homogenitási feltétel teljesülésekor /17.5.1/ szerint $[R^\nabla(X,Y)(Z)]^V=-[\varrho(X,Y),Z^V]$ s hogy t és T között a $t=T^V$ reláció áll fenn //18.1.1//. ::

<u>/18.1.6/ megjegyzés</u> /18.1.5/-nek érdekes konkluziója: <u>az affin Bianchi-identitás az $\mathfrak{S}R^{\nabla}(X,Y)(Z)=0$ klasszikus Bianchi-identitás általánositása.</u>

/18.2/ Az affin strukturák definiálásakor alkalmazott fogás, a horizontális fölemelés komponálása egy "tranzláció-morfizmussal" hatásos eszköznek bizonyul a <u>projektiv strukturák</u> analizisénél is, igaz, lényeges finomitások mellett. Mádositanunk kell magát a mindeddig érintetlen kiinduló helyzetet: egy "absztrakt" vektornyaláb - ill. az érintőnyaláb - alapulvétele önmagában kevés az elinduláshoz, ennek előfeltétele - legalábbis ha meg akarjuk őrizni tárgyalásunk szellemét, márpedig megakarjuk! - alkalmas <u>projektiv vektornyaláb</u> fölépitése! Egy ilyen konstrukció ötlete T. Otsukitól származik. Mi ezt [EgI] közvetitésével ismertük meg /az eredeti publikáció japán nyelvü/ s először is a saját adaptációnkat vázoljuk. - Legyen M n-dimenziós sokaság $(n\geq 1)$ s tekintsük a $GL(\mathbb{R}^{n+1})$ általános lineáris csoport

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} g & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ * & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; g \in GL(\mathbb{R}^n) \right\}$$

Lie-részcsoportját. Tegyük föl, hogy $\{(\mathcal{U}_\alpha, u_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ $/u_\alpha = (u_\alpha^1,\dots,u_\alpha^n)/$ atlasz M-en s ha $(\alpha,\beta)\in A\times A$-ra $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$, értelmezzük az $f_{\alpha\beta}: \mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta \longrightarrow G$, $p \longmapsto f_{\alpha\beta}(p)$ leképezést az

$$f_{\alpha\beta}(p) := \begin{pmatrix} \left(D_j\left(pr^i\circ(u_\alpha\circ u_\beta^{-1})\right)\right) & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ (c\,D_j \ln\Delta) & 1 \end{pmatrix}$$

előirással, ahol $\Delta := \det\left(D_j\left(pr^i\circ(u_\alpha\circ u_\beta^{-1})\right)\right)$ és $c\in\mathbb{R}^+$ rögzitett. Egyszerü számolással ellenőrizhető, hogy ekkor $(f_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in A\times A}$ teljesiti a <u>kociklus-feltételt</u>: $f_{\beta\alpha} = f_{\alpha\beta}^{-1}$, $f_{\alpha\beta}\cdot f_{\beta\gamma} = f_{\alpha\gamma}$ /föltéve, hogy $\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta\cap\mathcal{U}_\gamma\neq\emptyset$ /. Tetszőleges $(\alpha,\beta)\in A\times A$ indexpárra az $(\mathcal{U}_\alpha\times\mathbb{R}^{n+1})\cup(\mathcal{U}_\beta\times\mathbb{R}^{n+1})$ halmazon vezessük be a $\sim$ relációt a következő előirással: $p\in\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta$ esetén $(p,a)\sim(q,b)$ $:\Leftrightarrow q=p \wedge b=f_{\alpha\beta}(a)$, mig $p\in(\mathcal{U}_\alpha\cup\mathcal{U}_\beta)\setminus(\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta)$ teljesülésekor $(p,a)\sim(q,b) :\Leftrightarrow q=p\wedge b=a$. A kociklus-feltétel érvényessége garantálja, hogy igy <u>ekvivalenciarelációt</u> adtunk meg; (p,a) ekvivalenciaosztályát jelölje $\overline{(p,a)}$. Legyen mármost $\widetilde{M}(\mathcal{U}_\alpha,\mathcal{U}_\beta)$ az $(\mathcal{U}_\alpha\times\mathbb{R}^{n+1})\cup(\mathcal{U}_\beta\times\mathbb{R}^{n+1})/\sim$ faktorhalmaz, $\pi_{\alpha\beta}$ pedig az $\widetilde{M}(\mathcal{U}_\alpha,\mathcal{U}_\beta)\longrightarrow\mathcal{U}_\alpha\cup\mathcal{U}_\beta$, $\overline{(p,a)}\longmapsto p$ leképezés. Ha $\psi_\alpha:\pi^{-1}_{\alpha\beta}(\mathcal{U}_\alpha)\longrightarrow\mathcal{U}_\alpha\times\mathbb{R}^{n+1}$, $\overline{(p,a)}\longmapsto(p,a)$ s $\psi_\beta:\pi^{-1}_{\alpha\beta}(\mathcal{U}_\beta)\longrightarrow\mathcal{U}_\beta\times\mathbb{R}^{n+1}$ értelmezése analóg, ugy egyszerüen ellenőrizhető, hogy $(\widetilde{M}(\mathcal{U}_\alpha,\mathcal{U}_\beta),\pi_{\alpha\beta},\mathcal{U}_\alpha\cup\mathcal{U}_\beta)$ $(n+1)$ -rangu vektornyaláb, melynek számára $((\pi^{-1}_{\alpha\beta}(\mathcal{U}_\alpha),\psi_\alpha),(\pi^{-1}_{\alpha\beta}(\mathcal{U}_\beta),\psi_\beta))$ nyalábatlasz. Könnyü számolás után látható: e nyalábatlaszhoz átmeneti függvényekként /[Pr], 1.6/ éppen a megadott $f_{\alpha\beta}$, $f_{\beta\alpha}$ leképezések tartoznak. A továbblépés kézenfekvő: a kociklus-tulajdonságnak köszönhetően $\widetilde{M}(\mathcal{U}_\alpha,\mathcal{U}_\beta)$ konzisztens módon kiterjeszthető az $\widetilde{M}(\mathcal{U}_\alpha,\mathcal{U}_\beta,\mathcal{U}_\gamma),\dots,$ $\mathcal{P}TM:=\widetilde{M}((\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in A})$ sokasággá; igy eljárásunk végeredménye egy $\mathcal{P}\tau_M:=(\mathcal{P}TM,\pi,M)$ vektornyaláb, amelyet az M fölötti projektiv vektornyalábnak nevezzük. /Megmutatható, hogy $\mathcal{P}\tau_M$ független a kiindulásul szolgáló M -beli atlasz speciális választásától./ Konstrukciónknak - közelebbről az átmeneti függvények alkalmas kijelölésének - fontos következménye, hogy $\mathcal{P}TM$ tetszőleges pontja körül megadható olyan $(\pi^{-1}(\mathcal{U});(x^i),(y^i),(z))$ térkép, ahol $(x^i),(y^i)$ TM $(\mathcal{U};(u^i))$ által indukált szokásos lokális koordinátarendszerével /ld. /3.3// azonosítható s a $\frac{\partial}{\partial y^i}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ $(i\in\underline{n})$ koordinátavektormezők egyben lokális bázisát képezik $\mathfrak{X}_V(\mathcal{P}TM)$ -nek. Soronkövetkező meggondolásainkhoz végig egy ilyen $(\pi^{-1}(\mathcal{U});(x^i),(y^i),(z))$ térképet rögzitünk.

Minden készen áll immár a projektiv struktura fogalmának bevezetéséhez. - Egy $(H;\omega,\eta)$ hármast az M sokaság fölötti előprojektiv strukturának mondunk, ha H horizontális struktura τ_M -en, $\omega\in\mathfrak{X}^*M$ és $\eta\in\mathfrak{X}^*_V TM$ pedig 1 -forma M -en ill. vertikális 1 -forma TM -en. Jólismert elemi tény, hogy az M sokaság 1 -formái természetes módon interpretálhatók $TM\longrightarrow\mathbb{R}$ függvényekként; ennél az interpretációnál ω -nak $\widetilde{\omega}:v\in T_pM\longmapsto\widetilde{\omega}(v):=\omega_p(v)$ $(p\in M$ tetsz.$)$ felel meg. Amennyiben $\omega\restriction\mathcal{U}=\omega_i du^i$, ugy $\widetilde{\omega}\restriction\pi_M^{-1}(\mathcal{U})=(\omega_i\circ\pi_M)du^i=(\omega_i\circ\pi)y^i$. Az $\widetilde{\omega}$ függvényt - lokálisan - $\widetilde{\widetilde{\omega}}:\mathcal{P}TM\longrightarrow\mathbb{R}$ fügvénnyé terjesztjük ki az $\widetilde{\widetilde{\omega}}\restriction\pi^{-1}(\mathcal{U}):=(\omega_i\circ\pi_M)y^k+z$ előirás szerint. Előprojektiv strukturánk segitségével ezek után alkalmas liftelő formák konstruálhatók $\mathcal{P}\tau_M$ számára. Jelentse ℓ^H a H -hoz tartozó horizontális fölemelést s legyen tetszőleges $X \in \mathcal{X}(M)$ mellett $\tilde{\ell}^H$, $\tilde{\ell}^V$ és ℓ^∞ rendre az $\tilde{\ell}^H(X) := \ell^H(X) - \tilde{\omega}\ell^V(X) = X^H - \tilde{\omega}X^V$, $\tilde{\ell}^V(X) := (\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega})X^V$ és $\ell^\infty(X) := [\eta(X^V) + 2(X^V\tilde{\omega})]\frac{\partial}{\partial t}$ előírással definiálva, ahol $\ell^V : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}_V TM$ a /8.3.4/-ben leirt "kanonikus" vertikális liftelés. Megállapodva abban, hogy $\tilde{\omega}\ell^V(X) := \tilde{\omega}X^V$, $\tilde{\ell}^H = \ell^H - \tilde{\omega}\ell^V$ irható. Az $(\tilde{\ell}^H, \tilde{\omega}\ell^V)$ párt M fölötti, tágabb értelemben vett affin strukturáként emlithetjük, a kiemelt jelzővel arra utalva, hogy a /18.1/-ben látottakkal ellentétben itt a vertikális vektori forma egy $C^\infty(TM)$ -beli függvénnyel szorozva lett. Az $(\tilde{\ell}^H, \tilde{\ell}^V, \ell^\infty)$ hármast a (H, ω, η) előprojektiv strukturához tartozó projektiv strukturának nevezzük, a $\mathcal{P}\ell^H := \tilde{\ell}^H - (\tilde{\ell}^V + \ell^\infty)$ vetithető vektori 1-formát pedig a projektiv struktura liftelő formájának hivjuk. Közvetlenül adódik a

/18.2.1/ állitás Projektiv struktura liftelő formája horizontális strukturát származtat a projektiv vektornyalábon a /11.2.1/ szerinti értelemben. ::

Igen hasznosnak bizonyul még egy további $\tilde{\ell}^\infty$ -mal jelölt liftelő forma bevezetése az $X \in \mathcal{X}(M) \longmapsto \tilde{\ell}^\infty(X) := (X^H\tilde{\omega} + \eta(X^V))\frac{\partial}{\partial t}$ előirás szerint. Ekkor az $\tilde{\ell}^H\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i} - \Pi_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}$ és $\tilde{\ell}^\infty\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \Pi_i \frac{\partial}{\partial t}$ összefüggések által egyértelműen meghatározott Π_i^j, $\Pi_i \in C^\infty(TM)$ $(i, j \in \underline{n})$ függvényeket az $(\tilde{\ell}^H, \tilde{\ell}^V, \ell^\infty)$ projektiv struktura /alapulvett térképre vonatkozó/ Thomas-féle paramétereinek mondjuk.

/18.2.2/ állitás A projektiv struktura Thomas-féle paramétereit a kiindulásul szolgáló előprojektiv struktura egyértelműen meghatározza. Nevezetesen: amennyiben H paraméterei az $N_i^j \in C^\infty(TM)$ $/(i,j) \in \underline{n} \times \underline{n}/$ függvények, $\omega = \omega_i du^i$ és $\eta = \eta_i dy^i$, ugy $\Pi_i^j = N_i^j + \delta_i^j(\omega_k \circ \pi)y^k$,

$\Pi_i = \eta_i + \frac{\partial(\omega_k \circ \pi)}{\partial x^i} y^k - (\omega_k \circ \pi)N_i^k$ $(i, j \in \underline{n})$. Ha a H horizontális struktura homogenitási feltételt teljesit és $\eta \in \mathcal{X}_V^* TM$ másodrendben homogén, akkor $\eta = (\eta_{ik} \circ \pi)y^k dy^i$ $(\eta_{ik} \in C^\infty(M))$,

$\Pi_i^j = (\Pi_{ik}^j\circ\pi)y^k$, $\Pi_{ik}^j = N_{ik}^j - \delta_i^j\omega_k$ és $\Pi_i = (\Pi_{ij}\circ\pi)y^j$, $\Pi_{ij} = \eta_{ij} + \frac{\partial\omega_i}{\partial u^j} - \omega_\ell N_{ij}^\ell$ írható /v.ö. /16.3.5//, ebben az esetben a $\Pi_{ik}^j, \Pi_{ij} \in C^\infty(M)$ függvényeket a projektív struktura <u>klasszikus Thomas-féle paramétereiként</u> is említjük.

:: A /11.2.1/ bizonyításában látottak és /8.3.4/ figyelembevételével kijelentéseink egyszerü számolással verifikálhatók. - $\forall i\in\underline{n}$:

$$\tilde{\ell}^H\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) := \ell^H\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) - (\omega_k\circ\pi)y^k\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)^v = \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^j\frac{\partial}{\partial y^j} - (\omega_k\circ\pi)y^k\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} -$$
$$-\left(N_i^j + \delta_i^j(\omega_k\circ\pi)y^k\right)\frac{\partial}{\partial y^j}\ ; \quad \tilde{\ell}^\infty\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) := \left[\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)^H(\tilde{\omega}) + \eta\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)^v\right]\frac{\partial}{\partial z} =$$
$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^j\frac{\partial}{\partial y^j}\right)(\omega_k\circ\pi)y^k + \eta_k dy^k\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)\right]\frac{\partial}{\partial z} = \left(\eta_i + \frac{\partial(\omega_k\circ\pi)}{\partial x^i}y^k - (\omega_k\circ\pi)N_i^k\right)\frac{\partial}{\partial z}.$$

H paraméterei a homogenitási feltétel teljesülésekor $N_i^j = (N_{ik}^j\circ\pi)y^k$ $(N_{ik}^j \in C^\infty(M))$ alakuak //16.3.5//, míg ha η másodrendben homogén, ugy az $\eta_i \in C^\infty(TM)$ komponensfüggvények elsőrendben homogének //5.3.1// s ezért $\forall i\in\underline{n}$: $\eta_i = (\eta_{ik}\circ\pi)y^k$, $\eta_{ik}\in C^\infty(M)$. A klasszikus Thomas-féle paraméterekre fölirt formulák a tett észrevételek alapján közvetlenül nyerhetők. ::

<u>/18.2.3/ lemma</u> Ha $(\tilde{\ell}^H, \tilde{\ell}^v, \ell^\infty)$ a $(H; \omega, \eta)$ előprojektív strukturához tartozó projektív struktura s a $\mathcal{P}\ell^H = \tilde{\ell}^H - \tilde{\ell}^v - \ell^\infty$ liftelő forma által $\mathcal{P}\tau_M$ -en származtatott horizontális struktura paraméterei a θ_j^i, $\theta_j \in C^\infty(\mathcal{P}TM)$ függvények, akkor ezek, továbbá H paraméterei, valamint a Thomas-féle paraméterek között a $\theta_j^i = N_j^i + \delta_j^i z = \Pi_j^i - \delta_j^i\left((\omega_k\circ\pi)y^k - z\right)$ és $\theta_j = \eta_j + (\omega_j\circ\pi)z = \Pi_j + (\omega_k\circ\pi)N_j^k - y^k\frac{\partial(\omega_k\circ\pi)}{\partial x^j} + (\omega_j\circ\pi)z$ összefüggés áll fönn $(i,j\in\underline{n})$.

:: A θ_j^i és θ_j függvényeket a $\mathcal{P}\ell^H\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j} - \theta_j^i\frac{\partial}{\partial y^i} - \theta_j\frac{\partial}{\partial z}$ $(j\in\underline{n})$ előállítás értelmezi /v.ö. /11.2.1//bizonyításával!/. Mivel

$$\mathcal{P}\ell^H\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \tilde{\ell}^H\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) - \tilde{\ell}^v\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) - \ell^\infty\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \ell^H\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) - \tilde{\omega}\frac{\partial}{\partial y^j} - \tilde{\tilde{\omega}}\frac{\partial}{\partial y^j} + 2\tilde{\omega}\frac{\partial}{\partial y^j} -$$
$$-\left(\eta\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) + z\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\tilde{\omega}\right)\right)\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x^j} - N_j^i\frac{\partial}{\partial y^i} - z\frac{\partial}{\partial y^j} - (\eta_j + \omega_j\circ\pi)\frac{\partial}{\partial z} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^j} - (N_j^i + \delta_j^i z)\frac{\partial}{\partial y^i} - (\eta_j + \omega_j\circ\pi)\frac{\partial}{\partial z}\ ,$$

a $\theta_j^i = N_j^i + \delta_j^i z$ és

$\theta_j = \eta_j + \omega_j \circ \pi$ relációk közvetlenül adódnak. Ha ezekben N^i_j -t ill. η_j -t a számukra /18.2.2/-ből nyerhető kifejezéssel helyettesitjük, megkapjuk formuláink komplett alakját. ::

Bevezetjük a projektiv strukturák közötti /<u>projektiv</u>/ <u>ekvivalencia</u> fogalmát. - Legyen $(H;\omega,\eta)$ és $(\bar{H};\bar{\omega},\bar{\eta})$ egy-egy előprojektiv struktura az M sokaság fölött. Tekintsük a $\mathcal{P}\ell^H$ ill. a $\mathcal{P}\ell^{\bar{H}}$ liftelő forma által $\mathcal{P}\tau_M$ -en származtatott horizontális strukturára nézve horizontális vektormezők $\mathcal{H}_H\mathcal{P}TM$ ill. $\mathcal{H}_{\bar{H}}\mathcal{P}TM$ modulusát s jelölje $\check{Z}$ a $Z: TM \longrightarrow TTM$ Liouville-vektormező "projektiv kiterjesztését" /lokálisan $\check{Z} = y^i\frac{\partial}{\partial y^i} + z\frac{\partial}{\partial z}$ /. Ha $\mathcal{H}_H\mathcal{P}TM \oplus [\check{Z}] = \mathcal{H}_{\bar{H}}\mathcal{P}TM \oplus [\check{Z}]$ /ahol $[\check{Z}]$ a $\check{Z}$ által generált részmodulus/, akkor azt mondjuk, hogy a $(H;\omega,\eta)$ ill. $(\bar{H};\bar{\omega},\bar{\eta})$ előprojektiv strukturához tartozó projektiv strukturák <u>ekvivalensek</u> egymással.

<u>/18.2.4/ állitás</u> Két M fölötti projektiv struktura pontosan akkor ekvivalens, ha megadható egy $\varrho \in \mathcal{H}^*M$, $\varrho \restriction \mathcal{U} = \varrho_k du^k$ 1 -forma olymódon, hogy a projektiv strukturák által $\mathcal{P}\tau_M$ -en származtatott horizontális strukturák //18.2.3/-ban leirt/ θ^i_j, θ_j ill. $\bar{\theta}^i_j, \bar{\theta}_j$ paraméterei között a $\bar{\theta}^i_j = \theta^i_j + (\varrho_j \circ \pi)y^i$ $(i,j \in \underline{n})$ és a $\bar{\theta}_j = \theta_j + (\varrho_j \circ \pi)z$ $(j \in \underline{n})$ reláció áll fönn.

:: $\mathcal{H}_{\bar{H}}\mathcal{P}TM$ -nek lokális bázisát képezik az $\bar{X}_i = \frac{\partial}{\partial x^i} - \bar{\theta}^j_i\frac{\partial}{\partial y^j} - \bar{\theta}_i\frac{\partial}{\partial z}$ $(i \in \underline{n})$ vektormezők, $\mathcal{H}_H\mathcal{P}TM$ -nek pedig az $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} - \theta^j_i\frac{\partial}{\partial y^j} - \theta_i\frac{\partial}{\partial z}$ vektormezők. Projektiv ekvivalencia esetén $\forall i \in \underline{n}$: $\bar{X}_i \in \mathcal{H}_H\mathcal{P}TM \oplus [\check{Z}]$, ezért egyértelmüen meghatározott $p^k_i, \tilde{\varrho}_i \in C^\infty(\pi^{-1}(\mathcal{U}))$ függvényekkel $\bar{X}_i = p^j_i X_j - \tilde{\varrho}_i\check{Z} = p^j_i\frac{\partial}{\partial x^j} - (p^k_i\theta^j_k + \tilde{\varrho}_i y^j)\frac{\partial}{\partial y^j} - (p^k_i\theta_k + \tilde{\varrho}_i z)\frac{\partial}{\partial z}$ irható. Összevetve $\bar{X}_i$ -nek ezt az előállitását az eredetivel, tüstént következik, hogy $p^j_i = \delta^j_i$ s igy $\bar{\theta}^j_i = \theta^j_i + \tilde{\varrho}_i y^j$, $\bar{\theta}_i = \theta_i + \tilde{\varrho}_i z$. Be kell még látnunk: $\forall i \in \underline{n}$, $\tilde{\varrho}_i = \varrho_i \circ \pi$, $\varrho_i \in C^\infty(\mathcal{U})$. Vegyük ehhez észre: /18.2.3/-ból $\bar{\theta}_i - \theta_i = \bar{\eta}_i - \eta_i + [(\bar{\omega}_i - \omega_i)\circ\pi]z$, ahonnan $\frac{\partial}{\partial z}(\bar{\theta}_i - \theta_i) = (\bar{\omega}_i - \omega_i)\circ\pi$, s ezért egyben $\tilde{\varrho}_i = (\bar{\omega}_i - \omega_i)\circ\pi$ $(i \in \underline{n})$. Létezik tehát a kivánt ϱ 1 -forma, sőt az is kiderült, hogy $\varrho = \bar{\omega} - \omega$. - Megforditva: triviális számolás mutatja, hogy a nyert /lokális/ feltétel egyben elegendő a projektiv ekvivalencia teljesüléséhez. ::

- A bizonyitásból kiolvasható a

/18.2.5/ következmény Amennyiben a $(H;\omega,\eta)$ és $(\bar{H};\bar{\omega},\bar{\eta})$ előprojektiv strukturához tartozó projektiv strukturák ekvivalensek, ugy $\bar{\eta}=\eta$. ::

/18.2.6/ állitás A $\mathcal{P}\ell^{H}$ ill. $\mathcal{P}\ell^{\bar{H}}$ liftelő formákkal rendelkező projektiv strukturák ekvivalenciájához szükséges és elegendő olyan $\varrho\in\mathcal{X}^{*}M$ 1-forma létezése, amelynek $\tilde{\varrho}: TM\longrightarrow\mathbb{R}$ indukált függvényével tetszőleges $X\in\mathcal{X}(M)$ vektormező mellett $\mathcal{P}\ell^{\bar{H}}(X)=\mathcal{P}\ell^{H}(X)-(X^{v}\tilde{\varrho})\check{Z}$ teljesül.

:: Közvetlenül ellenőrizhető, hogy a most adott kritérium a /18.2.4/-beli relációk koordinátamentes megfogalmazása. ::

/18.2.7/ megjegyzés Ismeretes /ld. [YaI], I//2.8// - s közvetlenül is könnyen ellenőrizhető -, hogy tetszőleges $X\in\mathcal{X}(M)$ vektormező és $\lambda\in\mathcal{X}^{*}M$ 1-forma esetén $X^{v}\tilde{\lambda}=\lambda(X)\circ\pi_{M}$. Ennek alapján pl. a /18.2.6/-beli összefüggés a $\mathcal{P}\ell^{\bar{H}}(X)=\mathcal{P}\ell^{H}(X)-[\varrho(X)\circ\pi]\check{Z}$ alakban irható. Ezzel az átirási lehetőséggel a továbbiakban automatikusan élünk.

/18.2.8/ TÉTEL Az M sokaság fölötti $(H;\omega,\eta)$ és $(\bar{H};\bar{\omega},\bar{\eta})$ előprojektiv struktura akkor és csak akkor származtat egymással ekvivalens projektiv strukturákat, ha $\bar{\eta}=\eta$ s a $\varrho:=\bar{\omega}-\omega$ 1-formára tetszőleges $X\in\mathcal{X}(M)$ vektormezővel $\ell^{\bar{H}}(X)=\ell^{H}(X)-[\varrho(X)\circ\pi_{M}]\check{Z}$ teljesül. Ez lokálisan a H és $\bar{H}$ paraméterei közötti $\bar{N}^{i}_{j}=N^{i}_{j}+(\varrho_j\circ\pi_{M})y^{i}$ $/(i,j)\in\underline{n}\times\underline{n}/$ relációval ekvivalens.

:: A származtatott projektiv strukturák ekvivalenciája esetén /18.2.5/ értelmében $\bar{\eta}=\eta$, mig /18.2.6/ szerint $\forall X\in\mathcal{X}(M)$ $\mathcal{P}\ell^{\bar{H}}(X)=\mathcal{P}\ell^{H}(X)-[\varrho(X)\circ\pi_{M}]\check{Z}$. /18.2.4/ igazolásakor láttuk, hogy itt $\varrho=\bar{\omega}-\omega$, igy a /18.2.3/ bizonyitásában végzett számolás hasznositásával tetszőleges $j\in\underline{n}$ esetén egyrészt

$$\mathcal{P}\ell^{\bar{H}}\left(\frac{\partial}{\partial u^{j}}\right)=\ell^{\bar{H}}\left(\frac{\partial}{\partial u^{j}}\right)-z\frac{\partial}{\partial y^{j}}-(\eta_j+(\omega_j+\varrho_j)\circ\pi)\frac{\partial}{\partial z}\ ,\quad \text{másrészt}$$

$$\mathcal{P}\ell^{H}\left(\frac{\partial}{\partial u^{j}}\right)-\left[\varrho\left(\frac{\partial}{\partial u^{j}}\right)\circ\pi\right]\check{Z}=\ell^{H}\left(\frac{\partial}{\partial u^{j}}\right)-z\frac{\partial}{\partial y^{j}}-(\eta_j+\omega_j\circ\pi)\frac{\partial}{\partial z}-$$

$$-(\varrho_j\circ\pi)y^{i}\frac{\partial}{\partial y^{i}}-(\varrho_j\circ\pi)z\frac{\partial}{\partial z}\ ,$$

ahonnan $\ell^{\bar H}\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \ell^H\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) - (\varsigma_j\circ\pi)Z = \ell^H\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) - \left[\varsigma\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\circ\pi\right]Z$,

tehát $\ell^{\bar H}$ és ℓ^H között valóban a mondott kapcsolat áll fönn. Rutin számolással ellenőrizhető, hogy ekkor $\forall (i,j)\in \underline{n}\times\underline{n}$: $\bar N^i_j = N^i_j + (\varsigma_j\circ\pi)y^i$ ill. hogy ez utóbbi összefüggés koordinátamentes megfogalmazása éppen a horizontális fölemelések most vizsgált relációjához vezet. - Megforditva, amenynyiben $(H;\omega,\eta)$ és $(\bar H;\bar\omega,\bar\eta)$ eleget tesz a megadott feltételeknek, ugy pl. $\bar N^i_j = N^i_j + (\varsigma_j\circ\pi)y^i$ folytán /18.2.3/ alkalmazásával a /18.2.4/ kritériumhoz jutunk. ::

<u>/18.2.9/ megjegyzés</u> Kézenfekvő ezen a ponton a τ_M -en adott <u>horizontális strukturák</u> körében is bevezetni a <u>projektiv ekvivalencia</u> fogalmát. - Akkor mondjuk, hogy a H és $\bar H$ horizontális struktura a szóbanforgó kapcsolatban áll egymással, ha megadhatók olyan $\omega, \bar\omega \in \mathcal{X}^*M$ 1-formák, hogy - tetszőleges $\eta\in\mathcal{X}^*_v TM$ mellett - a $(H;\omega,\eta)$ és $(\bar H;\bar\omega,\eta)$ előprojektiv strukturák ekvivalens projektiv strukturákat származtatnak. A klasszikus elmélettel való "konzisztenciát" mutatja mármost a

<u>/18.2.10/ állitás</u> Legyen H és $\bar H$ homogenitási feltételt teljesitő horizontális struktura τ_M -en, tegyük föl továbbá, hogy mindkettőjükhöz torziómentes lineáris konnexió tartozik. Ekkor H és $\bar H$ projektiv ekvivalenciájának szükséges és elegendő feltétele olyan $\lambda\in\mathcal{X}^*M$ 1-forma létezése, amelylyel tetszőleges $X,Y\in\mathcal{X}(M)$ mellett $\bar\nabla_X Y = \nabla_X Y + \lambda(X)Y + \lambda(Y)X$ teljesül. E kritérium a $\bar H$ és H paraméterei közötti $\bar N^i_{jk} = N^i_{jk} + \delta^i_j\lambda_k + \delta^i_k\lambda_j$ $(i,j,k\in\underline{n})$ Weyl-féle relációval $[W]$ ekvivalens.

:: Projektiv ekvivalencia esetén /18.2.8/ értelmében $\exists\,\varsigma\in\mathcal{X}^*M$: $\forall X\in\mathcal{X}(M)$: $X^{\bar H} = X^H - [\varsigma(X)\circ\pi_M]Z$, s igy /16.3.2/ alapján $\forall X,Y\in\mathcal{X}(M)$: $(\bar\nabla_X Y)^v = [X^{\bar H},Y^v] - [(\varsigma(X)\circ\pi_M)Z, Y^v]$.

Itt /4.3.3/ és /5.2.4/ fölhasználásával $[(\varsigma(X)\circ\pi_M)Z, Y^v] = \varsigma(X)\circ\pi_M[Z,Y^v] = -(\varsigma(X)\circ\pi_M)Y^v$, tehát $(\bar\nabla_X Y)^v = [X^H,Y^v] + (\varsigma(X)\circ\pi_M)Y^v = (\nabla_X Y + \varsigma(X)Y)^v$ ill. $\bar\nabla_X Y = \nabla_X Y + \varsigma(X)Y$. A torziómentesség folytán $\bar\nabla_X Y = \frac{1}{2}(\bar\nabla_X Y + \bar\nabla_Y X + [X,Y])$ s hasonló vonatkozik $\nabla_X Y$ -ra, igy ha a nyert összefüggéshez hozzáadjuk a $\bar\nabla_Y X = \nabla_Y X + \varsigma(Y)X$ relációt majd mindkét oldalt elosztjuk 2 -vel s $\lambda := \frac{1}{2}\varrho$ helyettesitést végzünk, a kivánt $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \lambda(X)Y + \lambda(Y)X$ eredményre jutunk. További kijelentéseink helyessége könnyen következik az eddigiek alapján. ::

A projektiv strukturák e rövidre fogott diszkusszióját olyan észrevétellel zárjuk, amely szintén a klasszikus /ezuttal a Cartan-féle, [Ca2]/ elmélethez vezető utat jelzi.

<u>/18.2.11/ Állitás</u> Két projektiv struktura ekvivalenciájához szükséges és elegendő olyan $\varrho \in \mathcal{X}^*M$ 1 -forma létezése, amellyel a strukturák Thomas-féle paraméterei között a $\overline{\Pi}^i_j = \Pi^i_j + (\varrho_j \circ \pi)y^i + \delta^i_j(\varrho_k \circ \pi)y^k$, $\overline{\Pi}_j = \Pi_j - (\varrho_k \circ \pi)\Pi^k_j - (\varrho_j \circ \pi)(\varrho_k \circ \pi)y^k + \frac{\partial(\varrho_k \circ \pi)}{\partial x^j} y^k$ $(i, j, k \in \underline{n})$ összefüggések állnak fönn. Ezek a <u>klasszikus</u> Thomas-féle paraméterekre vonatkozóan a $\overline{\Pi}^i_{jk} = \Pi^i_{jk} + \delta^i_j \varrho_k + \delta^i_k \varrho_j$ ill. $\overline{\Pi}_{ij} = \Pi_{ij} - \varrho_k \Pi^k_{ij} - \varrho_i \varrho_j + \frac{\partial \varrho_j}{\partial u^i}$ alakot öltik.

:: Projektiv ekvivalencia esetén $\overline{\Pi}^i_j$ és Π^i_j ill. $\overline{\Pi}^i_{jk}$ és Π^i_{jk} közötti reláció /18.2.2/ alapján közvetlen következménye a /18.2.8/- és /18.2.10/-beli lokális formuláknak. Ugyancsak /18.2.2/-ből - /18.2.5/ figyelembevételével - $\overline{\Pi}_j - \Pi_j = \frac{\partial(\varrho_k \circ \pi)}{\partial x^j} y^k - (\overline{\omega}_k \circ \pi)\overline{N}^k_j + (\omega_k \circ \pi)N^k_j$. Itt /18.2.8/ és ismételten /18.2.2/ miatt $\overline{N}^k_j = N^k_j + (\varrho_j \circ \pi)y^k = \Pi^k_j - \delta^k_j(\omega_\ell \circ \pi)y^\ell + (\varrho_j \circ \pi)y^k$, következőleg

$$\overline{\Pi}_j - \Pi_j = \frac{\partial(\varrho_k \circ \pi)}{\partial x^j} y^k - (\omega_k \circ \pi + \varrho_k \circ \pi)N^k_j + (\omega_k \circ \pi)N^k_j -$$
$$-(\omega_k \circ \pi)(\varrho_j \circ \pi)y^k - (\varrho_j \circ \pi)(\varrho_k \circ \pi)y^k = \frac{\partial(\varrho_k \circ \pi)}{\partial x^j} y^k - (\varrho_k \circ \pi)\Pi^k_j + (\varrho_k \circ \pi)(\omega_\ell \circ \pi)\delta^k_j y^\ell -$$
$$-(\varrho_j \circ \pi)(\omega_k \circ \pi)y^k - (\varrho_j \circ \pi)(\varrho_k \circ \pi)y^k = \frac{\partial(\varrho_k \circ \pi)}{\partial x^j} y^k - (\varrho_k \circ \pi)\Pi^k_j - (\varrho_j \circ \pi)(\varrho_k \circ \pi)y^k,$$

amiből a $\overline{\Pi}_{ij}$ és Π_{ij} közötti összefüggés is azonnal adódik. - Megforditva, a Thomas-paraméterek most vizsgált kapcsolatának fennállásakor /18.2.2/ és /18.2.3/ alkalmazásával /18.2.4/ garantálja a projektiv ekvivalenciát; a számolás az iméntivel analóg. ::

/18.3/ Finsler-konnexiókkal kapcsolatos diszkussziónkat a horizontális strukturához csatolt konnexió fogalmának egy nagyfoku általánositásával késszitjük elő. - Legyen $\xi = (E, \pi, M)$,

$\tilde{\xi} = (\tilde{E}, \tilde{\pi}, M) \in VB(M)$. Egy (∇, A) párról azt mondjuk, hogy pszeudokonnexió ξ -n $\tilde{\xi}$ -ra vonatkozóan, ha $A \in Mor_M(\tilde{\xi}, \tau_M)$, $\nabla : Sec\,\tilde{\xi} \times Sec\,\xi \to Sec\,\xi$, $(\tilde{\sigma}, \sigma) \mapsto \nabla_{\tilde{\sigma}} \sigma$ és teljesülnek a következő axiómák: $\forall \tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2 \in Sec\,\tilde{\xi}$; $\sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in Sec\,\xi$, $f \in C^\infty(M)$:

/i/ $\nabla_{\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2} \sigma = \nabla_{\tilde{\sigma}_1} \sigma + \nabla_{\tilde{\sigma}_2} \sigma$, /iii/ $\nabla_{\tilde{\sigma}} (\sigma_1 + \sigma_2) = \nabla_{\tilde{\sigma}} \sigma_1 + \nabla_{\tilde{\sigma}} \sigma_2$,

/ii/ $\nabla_{f\tilde{\sigma}_1} \sigma = f \nabla_{\tilde{\sigma}_1} \sigma$, /iv/ $\nabla_{\tilde{\sigma}} f\sigma = [(A \circ \tilde{\sigma}) f] \sigma + f \nabla_{\tilde{\sigma}} \sigma$.

A pszeudokonnexió fogalmát - lényegesen speciálisabb körülmények között és eltérő motivációval - di Comite vezette be [di C]. A $\tilde{\xi} = \xi$ esetben egyszerüen ξ -n adott pszeudokonnexióról szólunk, az idevonatkozó részleteket illetően [Cn]-re utalunk. Jelen általánositást [SzK]-ban javasoltuk, éppen a Finsler-geometria igényeit tartva szem előtt. - A § hátralevő részében - ha közelebbit nem mondunk - $\xi = (E, \pi, M) \in VB(M)$ alapulvételével dolgozunk. Az eddigieknél sürübben fogunk a koordinátakifejezésekkel való direkt számolás eszközével élni. E számolásokat - miként korábban is - a "szokásos" $(\pi^{-1}(\mathcal{U}), (x^i), (y^\alpha))$ / $i \in \underline{n}, \alpha \in \underline{r}$ / vektortérképen //3.3// realizáljuk.

/18.3.1/ lemma Legyen $i \in Mor_E(V\xi, V\xi)$ az identitás morfizmus.
- Létezik egy és csak egy olyan (∇^i, i) pszeudokonnexió $V\xi$ -n, amelyre $\forall \sigma \in Sec\,\xi, X \in \mathfrak{X}_V E : \nabla^i_X \sigma^v = 0$.

:: Tetszőleges $\nabla^i : \mathfrak{X}_V E \times \mathfrak{X}_V E \to \mathfrak{X}_V E$ pszeudokonnexió paraméterei definiálhatók a $\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^\beta} = C^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y^\gamma}$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \underline{r})$ relációkkal, éppugy, mint lineáris konnexiók esetén. Ha ∇^i a kivánt pszeudokonnexió, ugy $\frac{\partial}{\partial y^\beta} = k^\# e_\beta$ $(\beta \in \underline{r})$ //4.4.3// folytán tüstént adódik a paraméterek mindegyikének eltünése. A $\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)^r_{\alpha=1}$ lokális bázisnak a /15.2.4/ bizonyitásában mondottak alapján könnyen levezethető transzformációs szabályát figyelembevéve, /i/-/iv/ alkalmazásával egyszerüen látható mármost, hogy a paraméterek „$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \underline{r} : C^\gamma_{\alpha\beta} = 0$" tulajdonsága - a megszokottól ezuttal eltérően! - konzisztens módon és egyértelmüen meghatározza a szóbanforgó pszeudokonnexiót. ::

/18.3.2/ megjegyzés Ha $X \upharpoonright \pi^{-1}(\mathcal{U}) = X^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$, akkor $\forall \alpha \in \underline{r}: \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} X = \frac{\partial X^\beta}{\partial y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\beta}$, igy lemmánk voltaképpen annak a Finsler-geometria korai periódusaitól kezdve jól ismert "tapasztalati ténynek" egyik lehetséges precíz megfogalmazása, miszerint "az y^α szerinti parciális deriválás tenzormezőt eredményez". - A $(\nabla^i{}_{,i})$, illetve egyszerüen ∇^i, pszeudokonnexiót - Matsumoto terminológiájával /ld. [M]/ szerves összhangban - indukált v -konnexiónak nevezzük

/18.4/ Finsler-konnexión a ξ vektor-nyalábhoz tartozó vertikális nyalábon adott lineáris konnexiót értünk. Fontos fölismerés /A. Kawaguchi, T. Okada s mindenekelőtt M. Matsumoto/: egy $\nabla: \mathcal{X}(E)\times\mathcal{X}_V E \longrightarrow \mathcal{X}_V E$ Finsler-konnexió önmagában nem elégséges a Finsler-geometria konnexióelméleti hátterének teljes kibontásához, ebben lényeges szerep jut - a mi terminológiánkkal élve - ξ egy horizontális strukturájának is. E megjegyzés szellemében egy (∇, H) párt Matsumoto-párnak nevezzük, ha ∇ Finsler-konnexió $V\xi$ -n, H pedig horizontális struktura ξ -n. ∇ paramétereit - kapcsolódva a jelölésbeli tradiciókhoz s egységes érvénnyel az alábbiakra nézve - a

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}=\Gamma^{\beta}_{i\alpha}\frac{\partial}{\partial y^\beta},\quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^\beta}=C^{\gamma}_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial y^\gamma}\quad (i\in B;\ \alpha,\beta,\gamma\in\underline{r})$$

előírással rögzitjük. - Megmutatjuk először is, hogy bizonyos esetekben már maga a Finsler-konnexió származtat horizontális strukturát ξ -n / s igy ilyenkor természetes módon Matsumoto-párrá egészithető ki/. Legyen tehát ∇ Finsler-konnexió s tekintsük a $\mathcal{K}: \mathcal{X}(E)\longrightarrow\mathcal{X}_V E$, $X\longmapsto\mathcal{K}(X):=\nabla_X Z$ leképezést. ∇ -t regulárisnak mondjuk, ha $\operatorname{Ker}\mathcal{K}\oplus\mathcal{X}_V E=\mathcal{X}(E)$, azaz ha //10.3.2// $\operatorname{Ker}\mathcal{K}$ horizontális strukturát határoz meg ξ -n.

/18.4.1/ lemma A $(\Gamma^{\beta}_{i\alpha}, C^{\gamma}_{\alpha\beta})$ paraméterekkel rendelkező Finsler-konnexió pontosan akkor reguláris, ha $\forall\alpha,\beta\in\underline{r}$:

$$\det\left(\delta^{\beta}_{\alpha}+y^\lambda C^{\beta}_{\alpha\lambda}\right)\neq 0.$$

:: $\operatorname{Ker}\mathcal{K}\oplus\mathcal{X}_V E=\mathcal{X}(E) \Longleftrightarrow \mathcal{K}\restriction\mathcal{X}_V E$ izomorfizmus $\Longleftrightarrow$ $\left(\mathcal{K}\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)\right)_{\alpha=1}^{r}$ lokális bázisa $\mathcal{X}_V E$ -nek. Mivel $\forall\alpha\in\underline{r}$:

$$\mathcal{K}\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)=\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}y^\lambda\frac{\partial}{\partial y^\lambda}=\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}+y^\lambda C^{\beta}_{\alpha\lambda}\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right)=\left(\delta^{\beta}_{\alpha}+y^\lambda C^{\beta}_{\alpha\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial y^\beta},$$

az utóbbi kijelentés az adott feltétellel ekvivalens. ::

Ha ∇ Finsler-konnexió, az általa a most leírtak szerint származtatott horizontális strukturát H^{∇} -val fogjuk jelölni.

<u>/18.4.2/ következmény</u> A H^{∇} horizontális struktura paraméterei az $y^{\beta}\Gamma^{\varkappa}_{i\beta} - N^{\lambda}_{i}(\delta^{\varkappa}_{\lambda} + y^{\beta}C^{\varkappa}_{\lambda\beta}) = 0$ $(i \in \underline{n}, \varkappa \in \underline{r})$ egyenletrendszer által egyértelmüen meghatározott (N^{λ}_{i}) függvények. ::

Ha (∇, H) Matsumoto-pár, ∇ és H között "a priori" semminemű kapcsolat nincs. Most egy Matsumoto-párból olyan hármast fogunk konstruálni, amelynek tagjait már sokkal bensőségesebb viszony füzi egymáshoz. A dolog absztrakt lényegével kezdjük. - Tegyük föl, hogy H horizontális struktura ξ -n, s tekintsük a hozzátartozó $\mathcal{H}$ horizontális leképezést //12.1//. Legyen $(\nabla^{h}, \mathcal{H})$ pszeudokonnexió $V\xi$ -n $\pi^{*}\tau_{M}$ -re vonatkozóan, (∇^{v}, i) pedig - tetszőleges - pszeudokonnexió $V\xi$ -n. Nevezzük az előbbit $V\xi$ egy h -<u>konnexiójának</u>, az utóbbit pedig egy v -<u>konnexiójának</u> s jelölésüket egyszerüsitsük ∇^{h} -ra ill. ∇^{v} -re. Az igy előálló $(\nabla^{h}, \nabla^{v}, H)$ hármast <u>Cartan-triádnak</u> mondjuk.

<u>/18.4.3/ TÉTEL</u> Ha $(\nabla^{h}, \nabla^{v}, H)$ Cartan-triád, akkor a

$$\nabla : \mathcal{X}(E) \times \mathcal{X}_{V}E \longrightarrow \mathcal{X}_{V}E, \ (X, Y) \longmapsto \nabla_{X}Y := \nabla^{v}_{VX}Y + \nabla^{h}_{\mu \circ X}Y$$

leképezés /ahol VX X vertikális része - /10.3/ -, μ pedig a /4.1.1/-ben bevezetett E -morfizmus/ <u>Finsler-konnexió</u>, következésképpen (∇, H) /Cartan-triádhoz asszociált/ <u>Matsumoto-pár</u>.

- Megforditva: amennyiben (∇, H) Matsumoto-pár, ugy

$\nabla^{h} : \mathrm{Sec}\,\pi^{*}\tau_{M} \times \mathcal{X}_{V}E \longrightarrow \mathcal{X}_{V}E, \ (\tilde{X}, Y) \longmapsto \nabla_{\mathcal{H}\circ\tilde{X}}Y$ és

$\nabla^{v} : \mathcal{X}_{V}E \times \mathcal{X}_{V}E \longrightarrow \mathcal{X}_{V}E, \ (X, Y) \longmapsto \nabla_{X}Y$ <u>h-</u> ill.

<u>v -konnexió</u> s ennek megfelelően $(\nabla^{h}, \nabla^{v}, H)$ /Matsumoto-párhoz asszociált/ <u>Cartan-triád</u>.

:: /i/ Legyen $(\nabla^{h}, \nabla^{v}, H)$ Cartan-triád. Azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges $X \in \mathcal{X}(E)$ mellett a konstruált ∇_{X} : $\mathcal{X}_{V}E \longrightarrow \mathcal{X}_{V}E$ leképezések rendelkeznek a kovariáns deriválást karakterizáló /Koszul által axiomatizált, ld. pl. [Pr] 2.51/ tulajdonságokkal. Ez rutin számolási gyakorlat; illusztrációjaként az egyik részállitás igazolása: $\nabla_{X}fY := \nabla^{v}_{VX}fY + \nabla^{h}_{\mu\circ X}fY =$

$$= [(VX)f]Y + f\nabla_{VX}Y + [(\mathcal{H}\circ\mu\circ X)f]Y + f\nabla^h_{\mu\circ X}Y =$$

$$[(VX)f + (HX)f]Y + f\nabla_X Y = (Xf)Y + f\nabla_X Y \quad /X\in\mathcal{X}(E), Y\in\mathcal{X}_V E, f\in C^\infty(E)$$

tetszőleges; fölhasználtuk a könnyen átlátható $\mathcal{H}\circ\mu\circ X = HX$ relációt s alkalmaztuk /18.3///iv/-t/. /ii/ Megfordiva, a Matsumoto-párból képzett ∇^v nyilvánvalóan v -konnexió; ∇^h -ra /18.3///i/-/iii/ automatikusan teljesül, de /iv/ ellenőrzése sem jár nehézséggel: $\forall\,\tilde{X}\in Sec\,\pi^*\tau_M,\ Y\in\mathcal{X}_V E,\ f\in C^\infty(M)$:

$$\nabla^h_{\tilde{X}} fY := \nabla_{\mathcal{H}\circ\tilde{X}} fY = (\mathcal{H}\circ\tilde{X})fY + f\nabla_{\mathcal{H}\circ\tilde{X}}Y = (\mathcal{H}\circ\tilde{X})fY + f\nabla^h_{\tilde{X}}Y. \ ::$$

<u>/18.4.4/ megállapodások</u> Ha $X\in\mathcal{X}(M)$, a $z\in E\longmapsto (z, X\circ\pi(z))\in E\times_M TM$ leképezés metszete $\pi^*\tau_M$ -nek, amelyet a következőkben $\check{X}$ jelöl. $Sec\,\pi^*\tau_M$ "általános" elemeit időnként a $\sim$ szimbólum alkalmazásával különböztetjük meg /igy tettünk /18.4.3/-ban is/. - Amennyiben (∇^h, ∇^v, H) Cartan-triád, ∇^h és ∇^v paramétereit - a /18.3.1/ bizonyitásában mondottakkal összhangban s némileg a tradiciókhoz is igazodva, - a

$$\nabla^h_{\frac{\check{\partial}}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} = F^\beta_{i\alpha}\frac{\partial}{\partial y^\beta}, \quad \nabla^v_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^\beta} = C^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial y^\gamma} \quad (i\in\underline{n};\ \alpha,\beta,\gamma\in\underline{r})$$

összefüggésekkel vezetjük be és rögzitjük. Könnyű számolással adódik ekkor a

<u>/18.4.5/ lemma</u> Ha (∇, H) a $(\Gamma^\alpha_{i\beta}, C^\alpha_{\beta\gamma}, N^\alpha_i)$ paraméterekkel rendelkező Matsumoto-pár s a hozzá asszociált Cartan-triád paraméterei $(F^\alpha_{i\beta}, \tilde{C}^\alpha_{\beta\gamma}, N^\alpha_i)$ akkor

$$F^\alpha_{i\beta} = \Gamma^\alpha_{i\beta} - N^\lambda_i C^\alpha_{\lambda\beta}, \quad \tilde{C}^\alpha_{\beta\gamma} = C^\alpha_{\beta\gamma} \quad (i\in\underline{n};\ \alpha,\beta,\gamma\in\underline{r}). \ ::$$

<u>/18.4.6/ állitás</u> Vegyük alapul a (∇^h, ∇^v, H) Cartan-triádot. - A $D: \mathcal{X}(M)\longrightarrow \mathcal{X}_V E,\ X\longmapsto D(X) := \nabla^h_{\check{X}} Z$ leképezés vertikális vektori 1 -forma //8.3//, amelynek koordinátaelőállitása $D\restriction \mathcal{X}(M)|\mathcal{U} = (y^\lambda F^\alpha_{i\lambda} - N^\alpha_i)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\otimes du^i$.

:: $D\in A^1(M; V\xi)$ igazolásához elég arra rámutatni, hogy a leképezés $C^\infty(M)$ -lineáris, ez azonban világos abból, hogy $\forall f\in C^\infty(M), X\in\mathcal{X}(M)$: $\check{(fX)} = (f\circ\pi)\check{X}$ s igy /18.3///ii/ értelmében $D(fX) = \nabla^h_{\check{fX}} Z = \nabla^h_{(f\circ\pi)\check{X}} Z = (f\circ\pi)\nabla^h_{\check{X}} Z$, az additivitást ui. /18.3///i/ közvetlenül garantálja. - Az értelmezés

alapján $\forall i \in \underline{n}$: $D\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \nabla^h_{\frac{\check{\partial}}{\partial u^i}} y^\lambda \frac{\partial}{\partial y^\lambda} = \left[\left(\mathcal{H}\circ\frac{\check{\partial}}{\partial u^i}\right)y^\lambda\right]\frac{\partial}{\partial y^\lambda} + y^\lambda F^\alpha_{i\lambda}\frac{\partial}{\partial y^\alpha} =$
$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)^H y^\lambda\right]\frac{\partial}{\partial y^\lambda} + y^\lambda F^\alpha_{i\lambda}\frac{\partial}{\partial y^\alpha} = \left(y^\lambda F^\alpha_{i\lambda} - N^\alpha_i\right)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}$, ez D lokális előállitására a felirt formulát adja. ::

/18.4.7/ megjegyzések /i/ A /18.4.6/-ban bevezetett D vektori 1-formát a Cartan-triád *deflexiós formájának* hivjuk. A konstrukció csekély módositásával nyerhető a $\widetilde{D}: Sec\,\pi^*\tau_M \longrightarrow \mathcal{X}_V E$, $\widetilde{X} \longmapsto \nabla^h_{\widetilde{X}} Z$ és a $\overline{D}: \mathcal{X}(E) \longrightarrow \mathcal{X}_V E$, $X \longmapsto \nabla^h_{\mu\circ X} Z = \widetilde{D}(\mu\circ X)$ leképezés, ezeket ugyancsak *deflexió*ként említjük. Világos, hogy ekkor $\overline{D} \in \mathcal{X}^1_1 E$ s az is rögtön látható, hogy $\widetilde{D}$ és $\overline{D}$ koordinátaelőállitása /és ezzel együtt információtartalma/ nem különbözik D koordinátaelőállitásától /ill. információtartalmától/. /ii/ Hasznosnak bizonyul a deflexió fogalmát árnyalatnyilag eltérő értelemben, Matsumoto-pár alapulvételével is megfogalmazni. - A (∇, H) *Matsumoto-pár deflexióján* - vagy a ∇ Finsler-konnexiónak a H horizontális strukturára vonatkozó deflexióján - a $D(\nabla, H): X \in \mathcal{X}(E) \longmapsto \nabla_{HX} Z$ leképezést értjük. ∇ és H - mint már hangsulyoztuk - a priori idegenek, "rokonságba" éppen a deflexió révén kerülnek.

/18.4.8/ állitás Ha ∇ reguláris Finsler-konnexió, akkor a (∇, H^∇) Matsumoto-párhoz asszociált Cartan-triád deflexiómentes.

1. bizonyitás Jelölje $\mathcal{H}^\nabla$ a H^∇ horizontális strukturához tartozó liftelő formát. A $(\nabla^h, \nabla^v, H^\nabla)$ csatolt Cartan-triád deflexiója /18.4.3/ figyelembevételével a $D: X \in \mathcal{X}(M) \longmapsto D(X) := \nabla^h_{\check{X}} Z = \nabla_{\mathcal{H}^\nabla \circ \check{X}} Z$ leképezés. Mivel itt $\mathcal{H}^\nabla \circ \check{X} \in \mathcal{X}_{H^\nabla} E := Ker\,\mathcal{K}$ s a definició szerint $\mathcal{K}(\mathcal{H}^\nabla \circ \check{X}) = \nabla_{\mathcal{H}^\nabla\circ\check{X}} Z$, D eltünése világos. ::

2. bizonyitás A koordinátakifejezésekkel dolgozunk. - H^∇ paraméterei /18.4.2/ értelmében az $y^\beta \Gamma^\alpha_{i\beta} - N^\lambda_i(\delta^\alpha_\lambda + y^\beta C^\alpha_{\lambda\beta}) = 0$ $(i \in \underline{n}, \alpha \in \underline{k})$ egyenletrendszer által meghatározott (N^α_i) függvények. Innen /18.4.5/ figyelembevételével $N^\alpha_i = y^\beta(\Gamma^\alpha_{i\beta} - N^\lambda_i C^\alpha_{\lambda\beta}) = y^\beta F^\alpha_{i\beta}$, ez pedig /18.4.6/ folytán a deflexió eltünését jelenti. ::

/18.4.9/ állitás /i/ Egy (∇, H) Matsumoto-pár deflexiója $(1,1)$ -tenzormező ξ totálterén, amelynek koordinátakifejezése $D(\nabla, H) \restriction \pi^{-1}(\mathcal{U}) = \left[y^{\alpha}\left(\Gamma^{\beta}_{i\alpha} - N^{\lambda}_{i} C^{\beta}_{\lambda\alpha}\right)\right] dx^{i} \otimes \frac{\partial}{\partial y^{\beta}}$, következésképpen (∇, H) deflexiója megegyezik a vele asszociált Cartan-triádhoz tartozó $\bar{D}$ deflexióval //18.4.7//.
/ii/ Ha ∇ reguláris Finsler-konnexió, akkor a (∇, H^{∇}) Matsumoso-pár deflexiómentes. Megforditva, amennyiben ∇ reguláris Finsler- konnexió és $D(\nabla, H) = 0$, ugy $H^{\nabla} = H$.

:: /i/ $D(\nabla, H) \in \mathcal{T}^{1}_{1} E$ közvetlenül adódik az értelmezésből s mivel $\forall i \in \underline{n}: D(\nabla, H)\left(\frac{\partial}{\partial x^{i}}\right) := \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{i}} - N^{\beta}_{i} \frac{\partial}{\partial y^{\beta}}} y^{\alpha} \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}} = y^{\alpha}\left(\Gamma^{\beta}_{i\alpha} - N^{\lambda}_{i} C^{\beta}_{\lambda\alpha}\right) \frac{\partial}{\partial y^{\beta}}$, a fölirt koordinátaelőállitás helyessége is világos. Ebből /18.4.5/ és /18.4.6/ alapján következik az /i/-ben tett további kijelentés. - Megjegyezzük, hogy a $D(\nabla, H) = \bar{D}$ egyenlőség közvetlenül is azonnal látható, hiszen /18.4.3/-ra tekintettel $\forall X \in \mathfrak{X}(E): \bar{D}(X) := \nabla^{h}_{\mathcal{K} \circ X} Z = \nabla_{\mathcal{H} \circ \mathcal{K} \circ X} Z = \nabla_{HX} Z = D(\nabla, H)(X)$.

/ii/ első megállapitása /18.4.8/-ból adódik /i/ alapján, a második pedig egyszerű számolással ellenőrizhető /18.4.2/ figyelembevételével. ::

/18.4.10/ következmény Tekintsük a D deflexióju $(\nabla^{h}, \nabla^{v}, H)$ Cartan-triádot s a H -hoz tartozó horizontális fölemelést jelölje ℓ^{H} . Ekkor az (ℓ^{H}, D) pár affin struktura ξ -n //18.1//, az $\ell^{H} - D: X \in \mathfrak{X}(M) \longmapsto \ell^{H}(X) - \nabla^{h}_{\hat{X}} Z$ affin liftelő forma koordinátaelőállitása
$$(\ell^{H} - D) \restriction \pi_{H}^{-1}(\mathcal{U}) = \left(\frac{\partial}{\partial x^{i}} - y^{\beta} F^{\alpha}_{i\beta}\right) \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}} \otimes dx^{i}. ::$$

/18.4.11/ megjegyzés Az (ℓ^{H}, D) affin strukturát a Cartan-triád által indukált affin strukturának nevezzük. Valójában ez a Matsumoto által bevezetett "V-konnexióhoz csatolt nemlineáris konnexió" megfelelője a mi fogalmi kereteink között, mint az /18.4.10/ és [M]//18.18/ összevetéséből közvetlenül kiderül.

/18.5/ Három fontos - a fogalmi szférához tartozó - konstrukciót emlitünk meg; ezek rendre a Matsumoto-elmélet C_1- és C_2 -feltételének ill. P^1 -torziójának felelnek meg. - Ismét vegyük alapul a $(\nabla^{h}, \nabla^{v}, H)$ Cartan-triádot!

/i/ Akkor mondjuk, hogy (∇^h, ∇^v, H) eleget tesz a C_1- ill. C_2 -feltételnek, ha $\forall X \in \mathfrak{X}_V E : \nabla^v_Z X = \nabla^i_Z X$ ill. $\nabla^v_X Z = \nabla^i_X Z$, ahol ∇^i az indukált v -konnexió.

/ii/ A $\mathcal{P}^1 : Sec\,\pi^* \tau_M \times \mathfrak{X}_V E \longrightarrow \mathfrak{X}_V E$, $(\tilde{X}, Y) \longmapsto v[\mathcal{H} \circ \tilde{X}, Y] - \nabla^h_{\tilde{X}} Y$ leképezést a Cartan-triádhoz tartozó <u>($\mathcal{P}^1$-)torzióleképezésnek</u> /vagy a Cartan-triád <u>$\mathcal{P}^1$-torziójának</u>/ hivjuk.

<u>/18.5.1/ megjegyzés</u> Mivel a C_1 és a C_2 -feltétel csak a Cartan-triád középső tagja felől rendelkezik, /18.4.5/ figyelembevételével következik, hogy e megszorítások egy Cartan-triádra s a vele asszociált Matsumoto-párra egyidejüleg teljesülnek vagy nem teljesülnek.

<u>/18.5.2/ lemma</u> /i/ A C_1- ill. a C_2 -feltétel a Cartan-triád /ill. a Matsumoto-pár/ paramétereire az $y^\beta C^\alpha_{\beta\gamma} = 0$ ill. az $y^\gamma C^\alpha_{\beta\gamma} = 0$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \underline{r})$ összefüggést irja elő.

/ii/ $\forall X \in \mathfrak{X}(M), Y \in \mathfrak{X}_V E : \mathcal{P}^1(\check{X}, Y) = [X^H, Y] - \nabla^h_{\check{X}} Y$.

/iii/ Ha $\mathcal{P}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) := \mathcal{P}^\beta_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\beta}$ $(i \in \underline{n}, \alpha \in \underline{r})$, akkor $\mathcal{P}^\beta_{i\alpha} = \frac{\partial N^\beta_i}{\partial y^\alpha} - F^\beta_{i\alpha}$ $(i \in \underline{n}; \alpha, \beta \in \underline{r})$; ezeket a függvényeket a $\mathcal{P}^1$ -torzió koordinátafüggvényeiként emlitjük.

:: /i/ könnyü rutin-számolással adódik. - Ad/ii/: /14.4.1/ figyelembevételével $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$: $\mathcal{H} \circ \check{X} = \ell^H(X) = X^H \in \mathfrak{X}_p E$, $X^H \tilde{\sim} X$, $Y \in \mathfrak{X}_V E \tilde{\sim} \sigma$ folytán igy $[\mathcal{H} \circ \check{X}, Y] = [X^H, Y] \in \mathfrak{X}_V E$ következik. /ii/-t fölhasználva $\forall i \in \underline{n}, \alpha \in \underline{r}$: $\mathcal{P}^1\left(\frac{\check{\partial}}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) = \left[\frac{\partial}{\partial x^i} - N^\beta_i \frac{\partial}{\partial y^\beta}, \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right] - F^\beta_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\beta} = \left(\frac{\partial N^\beta_i}{\partial y^\alpha} - F^\beta_{i\alpha}\right) \frac{\partial}{\partial y^\beta}$; tehát /iii/ is teljesül . ::

<u>/18.5.3/ állitás</u> Ha a (∇^h, ∇^v, H) Cartan-triád eleget tesz a C_2 -feltételnek, akkor a vele asszociált Matsumoto-pár konnexiótagja reguláris.

:: Kijelentésünk közvetlenül adódik /18.4.1/ és /18.5.2///i/ alapján, bemutatunk azonban egy valamivel konceptuálisabb érvelést is. - A /18.4.1/ igazolásakor alkalmazott gondolatmenet szerint elég annyit belátni, hogy $\left(\mathcal{K}\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)\right)^r_{\alpha=1}$ lokális bázisa $\mathfrak{X}_V E$ -nek. Ez azonban teljesül, hiszen /18.4.3/ figyelembevételével $\forall \alpha \in \underline{r}$: $\mathcal{K}\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) := \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} Z = \nabla^v_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} Z + \nabla^h_{\mu \circ \frac{\partial}{\partial y^\alpha}} Z =$
$= \nabla^i_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} y^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta} = \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + y^\beta \nabla^i_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^\beta} = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$. ::

<u>/18.5.4/ állitás</u> Amennyiben a H horizontális struktura homogenitási feltételt teljesit, ugy a (∇^h, ∇^v, H) Cartan-triád $\mathcal{P}^1$ -torziója és deflexiója között a $\mathcal{P}^1(\check{X}, Z) = -D(X)$ $(X \in \mathfrak{X}(M))$ összefüggés áll fenn. Ha ráadásul a deflexió eltünik, akkor a $\mathcal{P}^1$ -torzió koordinátafüggvényeire érvényes az $y^\beta \mathcal{P}^\alpha_{i\beta} = 0$ $(i \in \underline{n}, \alpha \in \underline{r})$ reláció.

:: /18.5.2///ii/ és /15.3.4/ alapján a homogenitási feltétel teljesülésekor $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$: $\mathcal{P}^1(\check{X}, Z) = [X^H, Z] - \nabla^h_{\check{X}} Z = -D(X)$.
/18.5.2///iii/-re is tekintettel $\forall i \in \underline{n}, \alpha \in \underline{r}$: $y^\beta \mathcal{P}^\alpha_{i\beta} = y^\beta \frac{\partial N^\alpha_i}{\partial y^\beta} - y^\beta F^\alpha_{i\beta} = N^\alpha_i - y^\beta F^\alpha_{i\beta}$ s deflexiómentesség esetén itt a 2. tag szintén N^α_i //18.4.6//, ilyenkor tehát $y^\alpha \mathcal{P}^\beta_{i\alpha} = 0$. ::

<u>/18.5.5/ következmény</u> A homogenitási feltétel teljesülésekor $\forall \widetilde{X} \in Sec\,\pi^*\tau_M$: $\mathcal{P}^1(\widetilde{X}, Z) = -\widetilde{D}(\widetilde{X})$ /v.ö. /18.4.7///i/.

:: Az állitás adódik /18.5.4/-ből, hiszen $Sec\,\pi^*\tau_M$ -nek alkalmas $\check{X} : z \in E \longmapsto \check{X}(z) = (z, X \circ \pi(z))$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ alaku vektormezők lokális bázisát képezik. ::

<u>/18.5.6/ megjegyzés</u> A mi tárgyalásunkban igen egyszerü leszármaztatást nyert /18.5.4/ klasszikus vonatkozásait illetően ismét Matsumoto monográfiájára utalunk, ld. főleg [M], p. 86-87.

A $\mathcal{P}^1$ -torzió birtokában módunk nyilik néhány nevezetes speciális Cartan-triád leirására. - A (∇^h, ∇^v, H) Cartan-triádot <u>Hashiguchi-</u> ill. <u>Rund-triád</u>nak mondjuk aszerint, amint $\mathcal{P}^1$ -torziója eltünik ill. $\nabla^v = \nabla^i$; az eltűnő $\mathcal{P}^1$ -torzióju Rund-triádot <u>Berwald-triád</u>nak hivjuk. <u>Berwald-konnexión</u> a Berwald-triádhoz tartozó Matsumoto-pár konnexió-tagját értjük.

<u>/18.5.7/ megjegyzés</u> Azonnal adódik az értelmezésekből, hogy a

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\underset{\text{Cartan-triád}}{\underline{(\nabla^h, \nabla^v, H)}} \arrow[r, "\nabla^v := \nabla^i"'] \arrow[d, "\mathcal{P}^1 = 0"'] & \underline{\text{Rund-triád}} \arrow[d, "\mathcal{P}^1 = 0"] \\
\underline{\text{Hashiguchi-triád}} \arrow[r, "\nabla^v := \nabla^i"'] & \underline{\text{Berwald-triád}}
\end{tikzcd}$$

séma "kommutativ diagramot" ad, világos továbbá, hogy Rund- /s igy egyben Berwald-/ triádra a C_1- és C_2 -feltétel automatikusan teljesül.

/18.5.8/ TÉTEL Vektornyaláb fölötti minden horizontális struktura egyértelműen meghatároz egy Berwald-triádot s következésképpen egy Berwald-konnexiót. A horizontális struktura pontosan akkor teljesiti a homogenitási feltételt, ha a hozzátartozó Berwald-triád deflexiómentes; görbületi tenzormezőjét előállitja vertikális projektorának a származtatott Berwald-konnexió szerinti külső kovariáns deriváltja.

:: Legyen H horizontális struktura a ξ -vektornyalábon s tekintsünk egy (∇^h, ∇^v, H) Berwald-triádot. Ekkor $\nabla^v = \nabla^i$ "a priori módon". A $\mathcal{T}^1$ -torzió eltünése folytán $\forall\, \widetilde{X} \in \mathrm{Sec}\,\pi^*\tau_M$, $Y \in \mathcal{X}_v E$: $0 = \mathcal{T}^1(\widetilde{X}, Y) = V[\mathcal{H}\cdot\widetilde{X}, Y] - \nabla^h_{\widetilde{X}} Y \Rightarrow \nabla^h_{\widetilde{X}} Y = V[\mathcal{H}\cdot\widetilde{X}, Y]$, a triád h -konnexió tagját tehát egyértelműen meghatározza az alapulvett horizontális struktura. - A homogenitási feltétel teljesülésekor $\mathcal{T}^1 = 0$ miatt /18.5.4/ a deflexió eltünését adja, deflexiómentesség esetén, pedig /18.5.2///ii/ figyelembevételével $\forall\, X \in \mathcal{X}(M)$: $0 = \mathcal{T}^1(\check{X}, \mathbb{Z}) = [X^H, \mathbb{Z}] - \nabla^h_{\check{X}} \mathbb{Z} = [X^H, \mathbb{Z}] - D(X) = [X^H, \mathbb{Z}]$, s ez - /15.3.4/ - a homogenitási feltétellel ekvivalens. - Jelölje ∇ a (∇^h, ∇^i, H) Berwald-triád által származtatott Berwald-konnexiót. Az imént mondottak és /18.4.3/ értelmében ez az $(X, Y) \in \mathcal{X}(E) \times \mathcal{X}_v E \longmapsto \nabla_X Y = \nabla^i_{VX} Y + \nabla^h_{\mu\cdot X} Y = \nabla^i_{VX} Y + V[\mathcal{H}\cdot\mu\cdot X, Y] = \nabla^i_{VX} Y + V[HX, Y]$ hozzárendelési szabály szerint hat. Tekintsük a H -hoz tartozó vertikális projektort s jelöljük ezt v -vel. Ekkor $VX, \dots$ helyett $vX, \dots$ is irható, az egyszerüség kedvéért ezt tesszük. A $d^\nabla v \in A^2(E, V\xi)$ külső kovariáns deriváltra /v.ö. /17.6// mármost tetszőleges $X, Y \in \mathcal{X}(E)$ mellett $d^\nabla v(X,Y) = \nabla_X vY - \nabla_Y vX - v[X,Y] = \nabla^i_{vX} vY - \nabla^i_{vY} vX + v[HX, vY] - v[HY, vX] - v[X,Y]$ adódik. Itt $v[HX, vY] - v[HY, vX] - v[X,Y] = v[HX, vY] - v[HY, vX] - v[HX + vX, HY + vY] = -[vX, vY] - v[HX, HY]$, tehát $d^\nabla v(X,Y) = \nabla^i_{vX} vY - \nabla^i_{vY} vX - [vX, vY] - v[HX, HY]$.

A koordinátakifejezések segitségével egyszerüen elvégezhető számolással azt kapjuk azonban, hogy $\nabla^i_{vX} vY - \nabla^i_{vY} vX - [vX, vY] = 0$, ilymódon $d^{\nabla}v(X,Y)=-v[HX,HY]$. Mivel H görbületi tenzormezőjére /17.3.2/-ből ugyancsak az $\mathcal{R}(X,Y)=-v[HX,HY]$ előállítás következik, a tételt igazoltuk. ::

<u>/18.5.9/ következmény</u> Az (N^{κ}_{i}) $(i\in\underline{n},\kappa\in\underline{r})$ paramétercsaláddal rendelkező horizontális struktura által meghatározott Berwald-triád ill. a megfelelő Matsumoto-pár a $\left(\frac{\partial N^{\kappa}_{i}}{\partial y^{\beta}},0,N^{\kappa}_{i}\right)$ ill. a $\left(\frac{\partial N^{\kappa}_{i}}{\partial y^{\beta}},N^{\kappa}_{i}\right)$ paramétercsaládokkal írható le.

:: A triád ∇^{i} tagjának paraméterei a /18.3.1/ bizonyításában látottak szerint eltűnnek. Mivel az imént tett észrevételek alapján $\forall i\in\underline{n},\beta\in\underline{r}$: $\nabla^{h}_{\frac{\partial}{\partial x^{i}}}\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}=\left[\frac{\partial}{\partial x^{i}}-N^{\kappa}_{i}\frac{\partial}{\partial y^{\kappa}},\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}\right]=\frac{\partial N^{\kappa}_{i}}{\partial y^{\beta}}\frac{\partial}{\partial y^{\kappa}}$, ∇^{h} paraméterei valóban a $\frac{\partial N^{\kappa}_{i}}{\partial y^{\beta}}$ függvények. A Matsumoto-párra vonatkozó kijelentés ezek után pl. /18.4.5/ figyelembevételével adódik. ::

<u>/18.5.10/ megjegyzések</u> /i/ Már utaltunk arra //15.3.5/, /18.0//, hogy a Finsler-konnexiók benséséges és lényegi kapcsolatban állnak a horizontális strkturákkal. Tételünk meggyőzően illusztrálja, hogy e kapcsolat tudatosítása és a kiaknázása mindkét irányban hasznos belátásokhoz vezet. /ii/ Jaak Vilmstől származik az az ötlet, hogy egy horizontális struktura görbülete leírható a Berwald-konnexió segítségével /[V]/. A problémára mi is ismételten visszatértünk / [SzK], [SzKz] /, persze eltérő megközelítésben. Mostani bizonyításunkat analizálva kiderül, hogy $d^{\nabla}v=\mathcal{R}$ teljesülésében a Berwald-triád ∇^{i} tagjának speciális tulajdonságaiból csak annyi lényeges, hogy $\forall X,Y\in\mathfrak{X}(E)$: $\nabla^{i}_{vX}vY-\nabla^{i}_{vY}vX-[vX,vY]=0$. Ez az észrevétel azt sugallja, hogy egy horizontális struktura görbületi tenzormezője a Berwald-konnexiónál általánosabb Finsler-konnexió segítségével is leszármaztatható. Valóban! – Nevezzük egy $\nabla:\mathfrak{X}(E)\times\mathfrak{X}_{v}E\longrightarrow\mathfrak{X}_{v}E$ Finsler-konnexió <u>vertikális torziójának</u> a $\mathrm{Tor}^{v}\nabla:\mathfrak{X}(E)\times\mathfrak{X}(E)\longrightarrow\mathfrak{X}_{v}E$, $(X,Y)\longmapsto\mathrm{Tor}^{v}\nabla(X,Y):=\nabla_{vX}vY-\nabla_{vY}vX-[vX,vY]$ leképezést. Érvényes ekkor a

<u>/18.5.11/ állítás</u> Legyen H horizontális struktura a ξ vektornyalábon s tegyük föl, hogy $\overset{\circ}{\nabla}$ eltűnő vertikális torzióval rendelkező, egyébként azonban tetszőleges

Finsler-konnexió. Ekkor $\nabla : (X,Y) \in \mathfrak{X}(E) \times \mathfrak{X}_v E \longmapsto \nabla_X Y := \overset{\circ}{\nabla}_{vX} Y + v[HX,Y] \in \mathfrak{X}_v E$ szintén Finsler-konnexió és $d^{\nabla} v = \mathcal{R}$, ahol v a H -hoz tartozó vertikális projektor, $\mathcal{R}$ pedig H görbületi tenzormezője.

:: Kézenfekvő számolás mutatja, hogy ∇ eleget tesz a lineáris konnexiókra kiszabott feltételeknek, a $d^{\nabla} v = \mathcal{R}$ reláció pedig - érthető módon - most is ugyanugy ellenőrizhető, mint a Berwald-konnexió esetében. ::

/18.6/ Záró gondolatsorunkat előkészitendő, néhány ismert tényt idézünk és interpretálunk. - Legyen $M \in \mathcal{M}$ s tekintsük a τ_M vektornyalábhoz tartozó $0 \longrightarrow V\tau_M \xrightarrow{i} \tau_{TM} \xrightarrow{\mu} \tau_M^* \tau_M \longrightarrow 0$ kanonikus egzakt sorozatot valamint azt a /4.2/-ben konstruált λ leképezést, amely most $\tau_M^* \tau_M \longrightarrow V\tau_M$ TM -morfizmusként funkcionál. Ekkor képezhető a $J := \lambda \circ \mu : TTM \longrightarrow VTM$ kompozició, amelyet TTM vertikális endomorfizmusának szokás nevezni /ld. pl. [D], 17.19 Problem 4 vagy [Bel], 1.21/. Jól ismert - de közvetlenül is azonnal látható-, hogy J nilpotens ($J \circ J = 0$) és $\operatorname{rang} J = n := \dim M$. A koordinátaelőállitás egyszerüen adódik /4.2/ figyelembevételével: $\forall a = a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_v + A^i \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_v \in T_v TM$:
$J(a) = a^i \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_v = dx^i(a) \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_v$ /a TM -en eddig is használt $(\tau_M^{-1}(\mathcal{U}), (x^i), (y^i))$ térképet véve alapul; ezen dolgozunk a továbbiakban végig/. - Emlékeztetünk arra, hogy másodrendü differenciálegyenleten olyan $X : TM \longrightarrow TTM$ vektormező értendő, amely metszete $T\tau_M$ tangens fibrálásának /2.6/ is, azaz amelyre $T\tau_M \circ X = 1_{TM}$ / [D], 18.3.2/. Könnyü számolással ellenőrizhető a

/18.6.1/ lemma Legyen $X \in \mathfrak{X}(TM)$. - /i/ Ha X másodrendü differenciálegyenlet, akkor $X \restriction \tau_M^{-1}(\mathcal{U}) = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + G^i \frac{\partial}{\partial y^i}$, ahol $G^i : \tau_M^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i \in \underline{n})$ sima függvények. /ii/ Ahhoz, hogy X másodrendü differenciálegyenlet legyen, szükséges és elegendő $J \circ X = Z$ teljesülése, ahol $Z \in \mathfrak{X}(TM)$ a Liouville-vektormező. ::

- Tekintsünk - harmadjára - egy $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ sima függvényt s nevezzük ezt - az analitikus mechanika szóhasználatával élve - Lagrange-függvénynek. A $d_J L := dL \circ J$ kompoziciót L vertikális differenciáljának hivjuk / [Pel], 1.25/; v.ö. még /18.2/-vel.

Ez szemibázikus differenciálforma /5.3/, hiszen $\forall a \in VTM$: $\exists\, b \in TTM : a = J(b)$, igy $\check{d}L(a) = dL \circ J(J(b)) = 0$, lévén $J \circ J = 0$. A szokásos terminológiát /[AM], 3.5.5/ követve, az $\omega_L := d\check{d}L$ 2 -formát Lagrange 2-formának nevezzük. Az alapulvett Lagrange-függvényt regulárisnak mondjuk, ha ω_L nemelfajuló; ez utóbbi nyilván egyet jelent azzal, hogy az $X \in \mathcal{X}(TM) \longmapsto i_X\omega \in \mathcal{X}^*TM$ leképezés nulltere $\{0\}$. Rutin számolás vezet az

$$\omega_L \restriction \pi_M^{-1}(\mathcal{U}) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial y^j} dx^i \wedge dy^j + \frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j} dy^i \wedge dy^j$$ koordinátakifejezéshez; ezt szerepelteti a fontos

/18.6.2/ lemma Az $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ Lagrange-függvény pontosan akkor reguláris, ha $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j}\right) \neq 0$.

:: Kézenfekvő számolási eljárást ad az állitás igazolására az az észrevétel, miszerint ω_L nemelfajuló volta azzal is ekvivalens, hogy az ω_L^n külső hatvány térfogati forma TM -en /[AM], 3.1.5/. ::

/18.6.3/ megjegyzés Ha az $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ Lagrange-függvény elsőrendben homogén /5.1/, ugy nem lehet reguláris, ui. a $\frac{\partial L}{\partial y^i} y^i = L$ relációból differenciálással $\frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j} y^i = 0$ $(j \in \underline{n})$ következik.

Negyedjére s egyben végezetül: az (M, L) párt Lagrange-térnek nevezzük, ha $M \in \mathcal{M}$, $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig reguláris Lagrange függvény. /E terminus használatát ujabban erősen szorgalmazza R. Miron, ld. [Mi] /. Az $E := \mathcal{L}_Z L - L$ függvény a Lagrange-tér energiafüggvénye, $X_L \in \mathcal{X}(TM)$ pedig Lagrange-vektormező, ha $i_{X_L}\omega_L = -dE$. Meglehetősen hosszadalmas, de nehézség nélkül keresztülvihető számolással ellenőrizhető a

/18.6.3/ lemma Ha X_L Lagrange-vektormező az (M, L) Lagrange-téren, akkor $X_L \restriction \pi_M^{-1}(\mathcal{U}) = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + G^i \frac{\partial}{\partial y^i}$,

ahol $G^i = g^{ij}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^k \partial y^j} y^k - \frac{\partial L}{\partial x^j}\right)$, $(g^{ij}) := \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j}\right)^{-1}$

/v.ö. /18.6.2//. ::

/18.6.4/ következmény Lagrange-téren egyértelműen létezik a Lagrange-vektor mező és az másodrendű differenciálegyenlet. ::

/18.7/ Megtartva a /18.6/-beli jelöléseket és megállapodásokat, vegyük alapul az (M, L) Lagrange-teret. - Az 1925-ös évektől jól ismert - legalábbis ami a dolog lényegét illeti -, hogy ha $G_j^i := \frac{1}{2}\frac{\partial G^i}{\partial y^j}$ $(i, j \in \underline{n})$, akkor a (G_j^i) függvénycsalád - a mi szóhasználatunkkal élve - horizontális strukturát származtat τ_M -en. /[Mi]-ben - meglepő módon - J. Krein tételeként idézi a szerző ezt a klasszikus eredményt - [Kr]-re utalva - s a /15.2///ii/ transzformációs szabály ellenőrzésével igazolja./ Nevezzük a szóbanforgó horizontális struktura által /18.5.8/ szerint egyértelmüen meghatározott Finsler-konnexiót a Lagrange-tér klasszikus Berwald-konnexiójának! - Fölhasználva Crampin [Cr] egy szellemes észrevételét, a mozaik-kockákból most már figyelemreméltó megállapitás rakható össze.

<u>/18.7.1/ TÉTEL</u> Legyen (M, L) Lagrange-tér, X_L a Lagrange-vektormező. - Az $\ell^B : X \in \mathcal{X}(M) \longmapsto \frac{1}{2}(X^c + [X^v, X_L])$ leképezés /ahol X^c és X^v a komplett ill. a vertikális lift, ld. /5.5/ ill. /8.3.4// liftelő forma /11.2.1/, a megfelelő horizontális strukturához /18.5.8/ szerint tartozó Finsler-konnexió éppen a klasszikus Berwald-konnexió.

:: Leggyorsabban a direkt lokális számolás vezet célhoz. - /5.5.1/, /8.3.4/ és /18.6.3/ alapján $\forall i \in \underline{n}$:

$$\ell^B\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)^c + \left[\frac{\partial}{\partial y^i}, y^j\frac{\partial}{\partial x^j} + G^j\frac{\partial}{\partial y^j}\right]\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial G^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial y^j} + \frac{\partial}{\partial x^i}\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\frac{\partial G^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial y^j}$$

- s innen minden kiolvasható. ::

<u>/18.7.2/ megjegyzés</u> Záró tételünkben a horizontális strukturához és a Finsler-konnexiókhoz csatlakozik az a harmadik elem is, amely meggyőződésünk szerint valóban lényegileg függ össze velük: a Lagrange-mechanika. Az igy teljessé váló kép elmélyültebb vizsgálata egyike lehet a közeljövő aktuális kutatási feladatainak.

IRODALOM

[AM] R.Abraham, J.E. Marsden, Foundations of Mechanics /2nd ed./; Benjamin-Cammings, Reading, Mass. /1978/.

[AMR] R.Abraham, J.E. Marsden, T. Ratiu, Manifolds, Tensor Analysis, and Applications; Addison-Wesley, Reading, Mass. /1983/.

[Be1] A.L.Besse, Manifolds all of whose geodesics are closed; Ergebnisse der Math. n° 93, Springer, Berlin /1978/.

[Be2] A.L. Besse, Einstein Manifolds; Ergebnisse der Math. 3.Folge, n° 10, Springer, Berlin /1987/.

[BrC] F.Brickell, R.S. Clark, Differentiable Manifolds; Reinhold, London /1970/.

[Ca1] É.Cartan, Sur les variétés a connexion affine et la théorie de la relativité généralisée; Ann. Ec. Norm. Sup. 40, 325-412 /1923/.

[Ca2] É.Cartan, Sur les variétés à connexion projective; Bull.Soc. Math. Fr. 52, 205-241 /1927/.

[Cn] I.Candela, Pseudoconnessioni di uno spazio fibrato vettoriale; Note di Matematica 2, 145-157 /1982/.

[Cr] M.Crampin, Tangent Bundle Geometry for Lagrangian Dynamics /preprint/.

[CM1] D.Canarutto, M.Modugno, General relativistic dynamics and structures observed by a frame of reference; Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino 41

[CM2] D.Canarutto, M.Modugno, Ehresmann's connections and the geometry of energytensors in Lagrangian field theories; Tensor N.S. 42, 112-120 /1985/

[CNS] L.Corvin, Y.Ne'eman, S.Sternberg, Graded Lie algebras in mathematics and physics /Bose-Fermi symmetry/; Rev.Mod.Phys. 47, 573-603 /1975/.

[diC] C.diComite, Pseudoconnessioni lineari su una varieta differenziabile di classe C^{∞}; Ann. di Mat. 83 Ser. IV, 133-152 /1969/.

[D] J.Dieudonné, Treatise on Analysis, Vols. III-IV; Academic Press, New York /1960-1978/.

[Do] P.Dombrowski, On the Geometry of the Tangent Bundle; J. reine angew. Math. 210, 73-88 /1962/.

[EgI] K.Eguchi, Y.Ichijyo, General Projective Connections and Finsler Metric; Journal of Math. Tokushima Univ. 3, 1-20 /1969/.

[Ehr1] C.Ehresmann, Sur les espaces fibrés différentiables; C.R. Acad. Sci. Pairs 224 1611-1612 /1947/.

[Ehr2] C.Ehresmann, Les connexions infinitésimales dans un espaces fibré différentiable; Colloq. Topol. /Espaces Fibrés/, Bruxelles, 29-55 /1950/.

[FrNi] A.Frölicher, A.Nijenhuis, Theory of vector valued differential forms I, Indag. Math. 18, 338-359 /1956/.

[Fu] A.Fujimoto, Theory of G-structures; Publ. of the Study Group of Geometry I, Okayama /1972/.

[Gar1] P.L.Garcia, Connections and 1-jet fiber bundles; Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 47 227-242 /1972/.

[Gar2] P.L.Garcia, The Poincaré-Cartan invariant in the Calculus of Variations; Symposia Mathematica, XIV, A.P., 219-246 /1974/.

[Go] C.Godbillon, Géometrie différentielles et mécanigue analytique, Hermann, Paris /1969/.

[Gol] H.Goldschmidt, Integrability criteria for systems of non-linear partial differential equations; J.Diff.Geom. 1, 269-307 /1967/.

[GHV] W.Greub, S.Halperin, R.Vanstone, Connections, Curvature, and Cohomology, Vols. I-II, Academic Press, New York /1972, 1973/.

[Gr] J.Grifone, Structure presque tangente et connexions I; Ann. Inst. Fourier Grenoble 22, 287-334 /1972/.

[GW] K.W.Gruenberg, A.J.Weir, Linear Geometry 2nd ed. Springer Berlin /1977/.

[H] D.Husemoller, Fibre Bundles 2nd ed.; Springer, New York /1975/.

[Her] R.Hermann, Vector Bundles in Mathematical Physics, Vols.I-II; W.A. Benjamin, Inc. New York /1970/.

[Kr] I.Kolař, On the second tangent bundle and generalized Lie derivatives; Tensor N.S. 38, 98-102 /1982/.

[K-S1] Y.Kosmann-Schwarzbach, Generalized symmetries of nonlinear partial differential equations; Letters in Math. Phys. 3, 395-404 /1979/.

[K-S2] Y.Koshman-Schwarzbach, Vector Fields and Generalized Vector Fields on Fibered Manifolds; Lecture Notes in Math. 792, 307-355, Springer, Berlin /1980/.

[K-S3] Y.Kosmann-Schwarzbach, Hamiltonian systems on fibered manifolds; Letters in Math. Phys. 5, 229-237 /1981/.

[K-S4] Y.Kosmann-Schwarzbach, Lie algebras of symmetries of partial differential equations; Differential Geometric Methods in Mathematical Physics 241-277, D. Reidel Publ. Company /1984/.

[Ko] J.L.Koszul, Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogénes complexes; Canad. 7. Math. 7, 562-576 /1955/.

[Kz] Kozma L., Finsler tipusu konnexiók vektornyalábokon /doktori értekezés/, Debrecen /1986/.

[KoNa] S.Kobayashi, T.Nagano, On Projective Connections; J.Math. Mech. 13, 215-236 /1964/.

[Kr] J.Krein, Lagrange Geometry; Arch. Math. 25, 438-443 /1974/.

[M] M.Matsumoto; Foundations of Finsler Geometry and Special Finsler Spaces, Kaiseisha Press /1986/.

[Mi] R.Miron, A Lagrangian Theory of Relativity, Sem. Geom. si Top., Timisoara /1985/.

[MM1] L.Mangiarotti, M.Modugno, Some results on the calculus of variations on jet spaces; Ann, Inst. Henri Poincaré 39, 29-43 /1983/.

[MM2] L.Mangiarotti, M.Modugno, Fibered spaces, Jet spaces and Connections for Field Theories; Proceedings of the meeting "Geometry and Physics", 135-165; Pitagora Editrice, Bologna /1983/.

[N] E.Nelson, Tensor Analysis; Princeton University Press and the University of Tokyo Press, Princeton, New Yersey /1967/.

[NijR] A.Nijenhuis, R.W. Richardson, Cohomology and deformation of algebraic structures; Bull. Am. Math. Soc. 70, 406-411 /1964/.

[OK] T.Okada, Minkowskian product of Finsler spaces and Berwald connection; J.Math. Kyoto Univ. 22, 323-332 /1982/.

[O'N] B.O'Neill, Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York /1983/.

[Pal] R.S. Palais, Foundations of Global Non-Linear Analysis, W.A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam /1968/.

[P] W.A. Poor, Differential Geometric Structures; McGraw-Hill Book Company, New York /1981/.

[Pr] A.Prastaro, On the General Structure of Continuum Physics: I.-Derivative Spaces; Bollettino della Unione Matematica Italiana /5/. 17-B, 704-726 /1980/.

[Sal] S.P. Salvioli, On the theory of geometric objects, J.Differential Geometry, 7, 257-278 /1972/.

[S] J.Sniatycki, On the geometric structure of classical field theory in Lagrangian formulation; Proc. Camb. Phil, Soc. 68, 475-484 /1970/.

[Sp] M.Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, II., Publish or Perish, Boston /1970/

[Sza] Z.J.Szabó, Über Zusammenhänge vom Finsler-Typ; Publ.Math. /Debrecen/, 27, 77-88 /1980/.

[Sz1] Szilasi J., Horizontális leképezések és tenzori konnexiók /doktori értekezés/, Debrecen /1981/.

[Sz2] J.Szilasi, Horizontal maps with homogeneity condition; Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser II, 403, 307-320 /1984/.

[Sz3] J.Szilasi, On the Curvature and Integrability of Horizontal Maps; Acta Math. Hung. 46, 183-188 /1985/.

[Sz4] J.Szilasi, Geometry on the Vertical Bundle; Publ. Math. /Debrecen/ - megjelenés alatt.

[SzK] J.Szilasi, Z.Kovács; Pseudoconnections and Finsler-type Connections; in: Colloquia Matematica Societatis János Bolyai 46 - nyomdában.

[SzKz] J.Szilasi, L. Kozma, Remarks on Finsler-type connections; Proc. of the third Nat. Sem. on Finsler spaces, 181-195 Brasov /1984/